

---

**TAMPEREEN YLIOPISTO**  
**Pro gradu -tutkielma**

---

**Meri Ahonen**

**"Matematiikan opiskelu yliopistossa  
on kuin pään hakkaamista seinään"  
– opiskelukokemuksia ensimmäisistä  
yliopistomatematiikan kursseista**

---

**Luonnontieteiden tiedekunta**  
**Matematiikka**  
**Toukokuu 2018**

---

Tampereen yliopisto

Luonnontieteiden tiedekunta

AHONEN, MERI: ”Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin pään hakkaamista seinään” – opiskelukokemuksia ensimmäisistä yliopistomatematiikan kursseista

Pro gradu -tutkielma, 52 s.

Matematiikka

Toukokuu 2018

---

## Tiivistelmä

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia kokemuksia ensimmäistä vuottaan opiskelevat, lukiotaustaiset opiskelijat, saivat yliopistomatematiikan opiskelusta Tampereen yliopistossa syyslukukaudella 2016. Teoreettinen viitekehys koostui matematiikkakuvasta, matemaattisesta todistamisesta ja matematiikan kielentämisestä. Tutkimuksessa tarkasteltiin opiskelijoiden matematiikkakuvan näyttäytymistä kokemuksissa, käsityksiä matemaattisesta todistamisesta ja kielentämisen vaikutuksesta todistamistehtävien idean ymmärtämiseen sekä kerättiin opiskelijoilta ehdotuksia opetuksen kehittämiseen.

Kvalitatiivista tapaustutkimusta varten aineisto kerättiin kyselyillä, kielentämistehtävillä ja haastatteluilla. Fenomenologisen tutkimusotteen mukaisesti tarkoituksena oli ymmärtää opiskelijoiden kokemuksia sellaisenaan, joten analysointi toteutettiin aineistolähtöisesti ja teoria auttoi tulkintojen tekemisessä. Kyselyiden perusteella haastatteluun pyydettiin 8 opiskelijaa, joiden tuottamaa haastatteluaineistoa ryhmiteltiin teemoihin. Tuloksissa kuvattiin aineistosta esiin nousseita teemoja opiskelijoiden kokemuksista luennoista, harjoituksista, kysymisestä, materiaaleista ja yliopistomatematiikasta. Opiskelijat jaettiin Tyytyväisiin ja Pettyjiin haastattelujen perusteella. Yliopistomatematiikka koetaan haastavana, mutta Tyytyväiset ovat luottavaisia omaan oppimiseensa, Pettyneillä on ollut vaikeuksia sopeutua. Opiskelijat kokevat luennot tärkeiksi oppimistilanteiksi, joita hyvä luentomateriaali tukee. Luennoilla ei uskalleta esittää kysymyksiä, harjoitusryhmissä keskustelulle on enemmän aikaa. Tyytyväisten ja Pettyneiden matematiikkakuva eroaa toisistaan osittain, heillä on erilaiset käsitykset itsestä matematiikan oppijana. Opiskelijat kuvailevat matemaattista todistamista esimerkiksi verbeillä ”päättelyä”, ”perustelemista” tai ”osoittamista”. Todistaminen koettiin vaikeaksi esimerkiksi heikkojen esitietojen vuoksi, mutta kielentämisen koettiin auttaneen todistamistehtävien idean ymmärtämisessä. Opiskelijat kehittäisivät yliopistomatematiikan opetusta esimerkiksi tehostamalla harjoitusryhmätoimintaa ja nauhoittamalla luentotallenteita.

Asiasanat: yliopistomatematiikka, matematiikkakuva, todistaminen, matematiikan kielentäminen

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>4</b>
1.1	Yliopistomatematiikan opiskelu lukion jälkeen . . . . .	4
1.2	Katsaus aiempiin tutkimuksiin . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Teoreettinen viitekehys</b>	<b>7</b>
2.1	Matematiikkakuva . . . . .	7
2.2	Matemaattinen todistaminen lukiossa ja yliopistossa . . . . .	10
2.3	Matematiikan kielentäminen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Tutkimuskysymykset</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Tutkimuksen toteutus</b>	<b>17</b>
4.1	Mittarin esittely . . . . .	17
4.2	Aineiston hankinta . . . . .	18
4.3	Analysointimenetelmät . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Tutkimuksen tulokset</b>	<b>20</b>
5.1	Kyselyt . . . . .	20
5.2	Haastateltavat . . . . .	21
5.3	Kokemuksia . . . . .	23
5.3.1	Luennoista . . . . .	24
5.3.2	Harjoituksista . . . . .	24
5.3.3	Kysymisestä . . . . .	25
5.3.4	Materiaaleista . . . . .	26
5.3.5	Yliopistomatematiikasta . . . . .	27
5.4	Opiskelijoiden matematiikkakuva . . . . .	27
5.5	Käsitys matemaattisesta todistamisesta . . . . .	29
5.6	Kielentämisen vaikutus . . . . .	30
5.7	Kehittäminen . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Johtopäätökset</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Pohdintaa</b>	<b>36</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>38</b>
	<b>Liitteet</b>	<b>44</b>

# 1 Johdanto

Matematiikan yliopisto-opinnot herättävät opiskelijoissa monenlaisia tunteita. Opiskellessaan matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelmassa matematiikan aineenopettajalinjalla, tutkimuksen tekijä pääsi osallistumaan opetuksen kehittämiseen opiskelijaedustajana muun muassa Informaatitieteiden yksikön opetussuunnitelmatyöryhmässä. Ainejärjestöaktiivina tutkija sai ainejärjestön tuutoritoiminnan kautta ensikäden tietoa uusilta opiskelijoilta. Vuosittain uudet opiskelijat painivat samojen haasteiden kanssa, jotka tutkija itse oli kohdannut. Pro gradun aiheen valinnan tullessa ajankohtaiseksi, kirkastui ajatus tutkielmasta, jonka tavoitteena olisi kerätä opiskelijoiden kokemuksia yliopistomatematiikan opiskelusta kirjalliseen muotoon.

## 1.1 Yliopistomatematiikan opiskelu lukion jälkeen

Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelmaan Tampereen yliopistoon hyväksytään vuosittain opiskelemaan noin 80 uutta opiskelijaa, joista lähes kaikki valitaan todistusvalinnalla. [1] Tutkinto-ohjelmassa opiskelija tekee kurssivalinnoillaan päätöksen opiskeleeko pääaineenaan matematiikkaa vai tilastotiedettä. Tutkintoon valituista opiskelijoista kolmasosa valmistuu kandidaatiksi ja vain noin viidesosa maisteriksi. Vuonna 2017 matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelmasta kandidaatiksi valmistui 29 opiskelijaa. Vuonna 2015 kandidaateiksi valmistui vain 16 ja vuonna 2016 vain 15 opiskelijaa. Matematiikan maisteriksi valmistui vuonna 2017 vain 15 opiskelijaa. Vuosina 2015 ja 2016 maisteriksi valmistui matematiikka pääaineenaan 18 opiskelijaa. [2] Monet tiedekuntaan valitut tulevat opiskelemaan matematiikkaa vuodeksi tai pari, tarkoituksenaan hakea samaan aikaan toista opiskelupaikkaa esimerkiksi lääketieteellisestä tiedekunnasta. Pelkästään alanvaihtajat eivät silti selitä suurta hävikkiä tutkinto-ohjelman opiskelijamäärissä.

Suurimmalla osalla yliopistoon valituista opiskelijoista on lukiotausta. Vuonna 2014 kaikista yliopistoon sisäänpäässeistä 74%:lla oli ylioppilastutkinto. [3] Lukio-koulutuksen tehtävänä on antaa laaja-alainen yleissivistys ja riittävät valmiudet lukion oppimäärään perustuviin jatko-opintoihin eli korkeakoulukelpoisuus. [4] Merkittävä osa vuonna 2016 matematiikan yliopisto-opintonsa aloittaneista on suorittanut lukion opetussuunnitelman perusteiden 2003 mukaisesti. Vuosina 2005-2015 voimassa olleessa lukion opetussuunnitelman perusteissa matematiikan tavoitteena oli mm. tutustuttaa opiskelijat matemaattisiin malleihin, opettaa ongelmanratkaisua ja arvioinnissa kiinnittää huomio päätelmien täsmälliseen ja johdonmukaiseen perusteluun. [4]

Herää kysymys, kuinka hyvin ”riittävät valmiudet” vastaavat todellisuudessa sitä, mitä esimerkiksi matematiikan yliopisto-opinnot vaativat? Minkälainen kuilu on lukion pitkän matematiikan antamien valmiuksien ja näkemysten sekä matematiikan yliopisto-opiskelun oletetun lähtötason välillä? Uudessa, 2016 voimaanastuneessa, lukion opetussuunnitelman perusteissa kehoitetaan seuraavasti: ”Opiskelija harjaannutetaan käyttämään tietokoneohjelmistoja matematiikan oppimisen ja tut-

kimisen sekä ongelmanratkaisun apuvälineinä. Matematiikan opiskelussa hyödynnetään muun muassa dynaamisen matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilasto-ohjelmistoja...” [5] Miten matematiikan yliopisto-opetus reagoi lukiokoulutuksen muutokseen? Yliopistomatematiikan opetus painottuu abstraktin matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja ongelmien ratkaisuun. [1] Kurssit painottuvat matemaattiseen todistamiseen. [6] Lukiomatematiikassa todistamista esiintyy vapaavalintaisella kurssilla (MAA11), mikä tarkoittaa, että yliopistomatematiikkaa voi päästä opiskelemaan tutustumatta todistusajatteluun aiemmissa opinnoissa. [4] [5] Pystyvätkö uudet matematiikan opiskelijat omaksumaan yliopistomatematiikan sisältöjä, vai puuttuuko heiltä tarvittavat esitiedot?

Matematiikan yliopisto-opiskelu eroaa alempien kouluasteiden opiskelusta huomattavasti. Uudella opiskelijalla on edessään monta haastetta. Orientoituminen yliopistoon vie aikaa ja usein elämässä tapahtuu muitakin muutoksia, kuten uuteen kaupunkiin muutto ja uusien ihmissuhteiden luonti. Etenkin nuorelle yliopistopolkuun aloittelevalle opiskelijalle ensimmäinen vuosi voi tuntua raskaalta. Yliopistolain muutoksen jälkeen korkeakoulujen valintaperusteisiin tuli ensikertalaisikiintiöt, mikä tarkoittaa, että ensimmäistä korkeakoulupaikkaansa vastaanottavilla on paremmat mahdollisuudet päästä sisään. [7] Opintopaikkaa hakevilla on entistä suuremmat paineet onnistua valitsemaan itselle sopiva opiskelupaikka ensimmäisellä yrittämällä. Ensikertalaisikiintiöt astuivat voimaan vuonna 2016 myös Tampereen yliopistossa. Tulevaisuus näyttää, vaikuttaako muutos matematiikasta kandidaateiksi ja maisteriksi valmistuvien määrään esimerkiksi suosimalla motivoituneempia opiskelijoita.

Tällä hetkellä voidaan kuitenkin tutkia olemassa olevia käytäntöjä ja niistä saatuja opiskelukokemuksia. Tutkimuksessa haluttiin selvittää, millaisia kokemuksia ensimmäistä vuottaan matematiikkaa yliopistossa opiskelevat saavat opinnoissaan. Tavoitteena on kehittää matematiikan opetusta kartoittamalla opiskelijakokemusten laatua. Yliopisto-opetuksen tulee perustua tutkimukseen, joka takaa laadukkaan opetuksen.

## 1.2 Katsaus aiempiin tutkimuksiin

Tampereen yliopistossa ei ole aiemmin tehty tutkimusta ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden kokemuksista matematiikan opiskelusta. Tampereen teknillisessä yliopistossa (TTY) Silius, Pohjolainen, Miilumäki, Kangas & Joutsenlahti (2011) ovat tutkineet *Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä* -artikkelissa ”opiskelijoiden matematiikan osaamiseen vaikuttavia tekijöitä, matematiikan opetuksen kehittämiseen tähtääviä tutkimustuloksia sekä arvioidaan toimintojen vaikutusta matematiikan osa-alueiden kehittymiseen.” Aloittavien opiskelijoiden motivaatiossa ja pohjatiedoissa löydettiin puutteita, joihin kehitettiin tukitoimia. [8] Myös Joutsenlahti, Ali-Löytty & Pohjolainen tutkivat oppimisen ja opettamisen kehittämistä insinöörimatematiikassa teknologian kanssa ja ilman vuonna 2016 julkaistussa artikkelissaan. [9] Lisäksi TTYllä on tutkittu vuonna 2012 ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kokemuksia ja odotuksia yliopisto-opiskelusta yleisesti. Tutkimuksessa kävi ilmi, että ”yliopisto-opiskelun itsenäisyys ja oma vastuu opintojen etenemisestä tulee monelle yllätyksenä” ja opinnot koetaan haastavina. Opiskeli-

jat kokevat ongelmikseen oman laiskuuden ja asioiden lykkäämisen viime tippaan. Teknis-luonnontieteelliseen koulutusohjelmaan hyväksytyistä opiskelijoista moni valitsi koulutuksen varavaihtoehtona ja pyrkii lääketieteelliseen. [10] Tampereen yliopistossa on tutkittu poikkitieteellisesti opiskelijoiden ja opettajien myönteisiä kokemuksia opetuksesta ja opiskelusta vuonna 2014. ”Tutkimuksen keskeisin tulos on, että opetus- ja opiskelutilanteissa yliopiston opettajissa ja opiskelijoissa myönteisiä tunteita herättävät tunteet ja tunnelmat, opintojen organisointi, oppiminen, oivaltaminen ja ymmärtäminen, tavoitteiden saavuttaminen ja haasteiden voittaminen sekä ihmissuhteet ja vuorovaikutus.” [11]

## 2 Teoreettinen viitekehys

Kokemus muodostuu kokijan ja kokemuksen välisestä suhteesta, kun ne muodostavat yhdessä merkityssuhteen, johon vaikuttaa ihmisen elämäntilanne. [12] Kokemus opiskelusta nojaa vahvasti siihen, mitä ja millä tavoin opiskellaan. Tarkastellessa opiskelijoiden kokemuksia yliopistomatematiikan opiskelusta, voidaan havaita opiskelijan matematiikkakuvan piirteitä, sillä matematiikkakuva muodostuu henkilön kokemuksista matematiikan parissa. [13] Luvussa esitellään matematiikkakuvaan liittyvät käsitteet ja komponentit, joiden pohjalta tutkimuksessa tarkastellaan haastateltavien matematiikkakuvien näyttäytymistä heidän yliopisto-opiskelukokemuksissaan.

Luvussa esitellään myös matemaattista todistamista lukiossa ja yliopistossa. Tutkimuksessa haluttiin selvittää, miten ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevat ymmärtävät matemaattisen todistamisen. Luvussa tarkastellaan todistamisen kulttuuria lukion oppimäärän pohjalta ja Tampereen yliopiston ensimmäisten matematiikan kurssien suhteen.

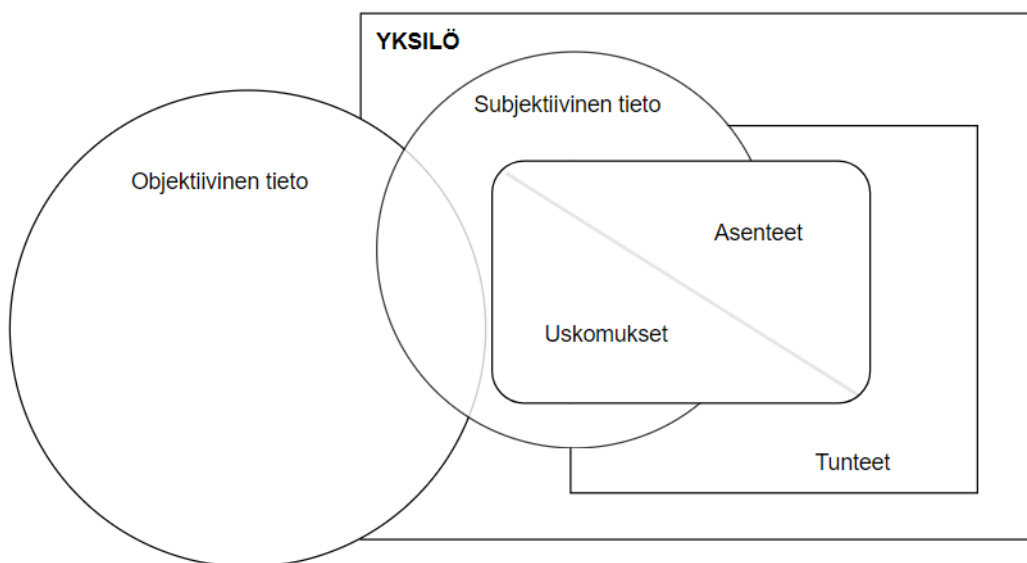
Lopuksi käsitellään matemaattinen kielentäminen opetusmetodinä, jonka on tutkittu edistävän matematiikan oppimista. Tutkimuksessa kerättiin opiskelijoiden kokemuksia kielentämisen vaikutuksesta todistamisen idean ymmärtämisessä.

### 2.1 Matematiikkakuva

Tutkimuksessa haluttiin selvittää, millaisena opiskelijoiden matematiikkakuva (*view of mathematics*), näyttäytyy yliopistomatematiikan opiskelukokemuksissa. Matematiikkakuvan muodostumista ovat tutkineet ainakin Joutsenlahti [14], Kaasila ym. [15], Pehkonen [13] sekä Törner [16]. Matemaattinen identiteetti kuvaa henkilön suhdetta matematiikkaan. [17] Matematiikkakuva on tärkeä osa sitä. Matematiikkakuva koostuu objektiivisesta ja subjektiivisesta tiedosta, tunteista, uskomuksista ja asenteista. [18] Kuvassa 2.1 on mallinnettu matematiikkakuvaan liittyvien käsitteiden suhteita. ”Matematiikkakuva vaikuttaa matematiikan opiskeluun, ja opiskelussa saadut kokemukset vaikuttavat menestymiseen, itsetuntoon ja itsetyytyväisyyteen. Toisaalta itsetunto vaikuttaa toimintaan matematiikan opiskelussa, ja saadut kokemukset vaikuttavat matematiikkakuvaan.”, toteaa Pietilä väitöskirjassaan. [19] Tässä tutkimuksessa käytetään Kaasilan ym. [15] muodostamaa määritelmää, joka perustuu Pehkosen ja Pietilän [18] sekä Op’t Eynde, De Corte ja Verschaffelin [20] artikkeleihin.

Tarkastellessa matematiikkakuvaa kognitiivisesti, voidaan se jakaa kolmeen komponenttiin:

- I uskomuksiin itsestä matematiikan oppijana (ja opettajana),
- II uskomuksiin matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta [18]
- III uskomukset sosiaalisesta kontekstista, jossa oppiminen ja opetus tapahtuu. [20]



Kuva 2.1: Malli matematiikkakuvaan liittyvien käsitteiden suhteista, vrt. Pehkonen & Pietilä [18]

Ensimmäiseen komponenttiin sisältyy itseluottamuksen, minäpystyvyyden, käsite, joka vaikuttaa matematiikkakuvaan muodostumiseen. Tässä tutkimuksessa ei koettu tarpeelliseksi ottaa huomioon uskomuksia itsestä matematiikan opettajana, siksi kohta on merkitty sulkeisiin. Toiseen komponenttiin liittyy opetuksen järjestämiseen liittyvät asiat. Kolmanteen komponenttiin kuuluu kaikki opetusryhmässä tapahtuva. [15] Määritellään seuraavaksi matematiikkakuvaan liittyvät käsitteet, sillä esimerkiksi asenteilla ja uskomuksilla saatetaan joissain yhteyksissä tarkoittaa samaa asiaa.

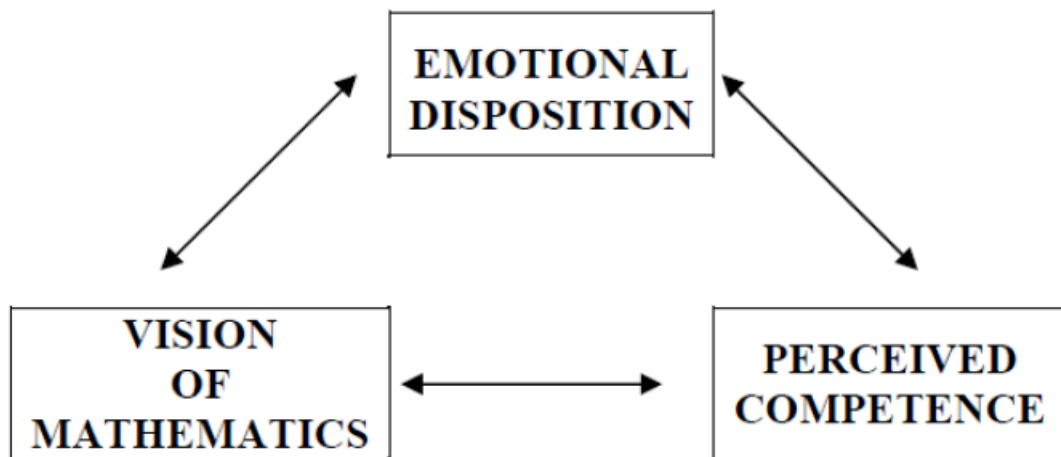
Tieto (*knowledge*), voidaan jakaa objektiiviseen ja subjektiiviseen tietoon. Objektiivisella tiedolla tarkoitetaan yleisesti hyväksyttyä, formaalia ja virallista tietoa. Subjektiiivinen tieto on yksilöllistä ja se perustuu yksilön kokemuksiin ja tulkintoihin. Matematiikassa objektiivinen tieto on puhdasta logiikkaa ja se on muovautunut vuosisatojen tutkimuksen tuloksena. Subjektiiivinen tieto matematiikassa on koko yksilön tietorakenne, johon opiskellessaan matematiikkaa (objektiivista tietoa) hän liittää uusia asioita ja mahdollisesti joutuu muuttamaan aiempia käsityksiään. Subjektiiivisen tiedon kautta päästään käsiksi tiedon ja uskomusten väliseen suhteeseen. Käsitykset ovat subjektiivisia näkökulmia asiaan. Yksilö tarkastelee asiaa omasta näkökulmastaan, joka voi olla yksipuolinen. Objektiivinen tieto tarkastelee asiaa monesta näkökulmasta. [18]

Tunteet (*emotions*), ovat yksilön tilannetulkintoista riippuvaisia, intensiivisiä, suhteellisen nopeasti ilmeneviä ja katoavia negatiivisia tai positiivisia tuntemuk-



sia. [21] Tunteet sisältävät psykologisia reaktioita ja vaikuttavat ihmisen kognitiivisiin prosesseihin monin tavoin. Lisäksi sosiaalinen aspekti, oppimisen konteksti on tärkeässä roolissa. Tunteet nähdään funktionaalisina ja niillä on olennainen rooli ihmisen selviytymisessä, sopeutumisessa ja päätöksen teossa. [22] Matemaattisessa ongelmanratkaisussa tunteet, kuten uteliaisuus, turhautuminen, ahdistuneisuus, hämmästyminen ja riemu, ovat tärkeässä osassa kun kysessä ei ole rutiininomainen ongelma. Negatiiviset tunteet, kuten turhautuminen ja ahdistuminen vievät huomion ja estävät kognitiivisia prosesseja, kun taas uteliaisuus edistää niitä. [23]

Asenteen (*attitude*), käsite matematiikan yhteydessä on ollut tutkimusten kohteena usein, mutta sen määrittely on vaihdellut paljon. Asenne on koettu tärkeäksi vaikuttajaksi yksilön suhteeseen matematiikkaan kohtaan, mutta sen suhteita muihin vaikuttaviin tekijöihin on ollut vaikea määritellä yksiselitteisesti. Jossain vaiheessa siirryttiin tarkastelemaan määritelmien oikeellisuuden sijaan niiden sopivuutta kuvaamaan asennetta matematiikkaa kohtaan. 2000-luvulla siirryttiin tutkimaan asennetta kvalitatiivisin menetelmin. [24] Martino ja Zan tutkivat asenteita matematiikkaa kohtaan keräämällä narratiivisia kirjoituksia 1662 opiskelijalta aiheesta ”Matematiikka ja minä: tähänastinen suhteeni matematiikkaan”. Kertomuksista erottui kolme ulottuvuutta: tunnepohjaiset taipumukset matematiikkaa kohtaan, matematiikkakuva sekä koettu osaaminen (”emotional disposition, vision of mathematics and perceived competence”). Kertomusten pohjalta Di Martino ja Zan loivat kolmidimensionaalisen mallin kuvaamaan asennetta, ”a three-dimensional model for attitude, TMA”, jota havainnollistaa kuva 2.2.



Kuva 2.2: Martinon & Zanin luoma kolmidimensionaalinen malli kuvaamaan asennetta [22]

Kaikki kolme ulottuvuutta ovat suhteessa keskenään ja selittävät näin asenteen monimuotoisuutta. Asenne toimii siltana uskomusten ja tunteiden välillä ja ottaa niiden erityispiirteet sekä niiden suhteen huomioon. Mallin avulla voidaan tulkita

toistuvia ilmiöitä asenteen kehittymisessä matematiikkaa kohtaan. Mallin avulla pystytään etenkin määrittelemään aiempaa tarkemmin negatiivisen asenteen eri muodot. [22]

Pehkonen ja Pietilä [18] määrittelevät uskomukset (*beliefs*), yksilön suhtautumisen eli asenteena asioihin ja niiden välisiin suhteisiin. Suhtautuminen perustuu yksilön subjektiiviseen tietoon ja tunteisiin jotka taas perustuvat usein henkilökohtaiseen kokemukseen. Siksi yksilön uskomukset eivät välttämättä ole yleisesti hyväksytyjä ja ne ilmentävät jonkinlaista hiljaista tietoa. Uskomukset toimivat verkoston tavoin eli moni uskomus liittyy toisiinsa. Ihmisen uskomussysteemi on kokoelma tietoisia ja tiedostamattomia uskomuksia sekä hypoteeseja ja odotuksia. [18]

Minäpystyvyys (*self-efficacy*), tarkoittaa uskomuksia henkilön itsensä kyvyistä organisoida ja toteuttaa suunnitelmiaan, joita vaaditaan tavoitteen suorittamiseen. Minäpystyvyys-uskoa matematiikkaa kohtaan tutkitaan monin eri metodein maailmanlaajuisesti. Laadukasta mittaustapaa ei ole vielä löydetty. Viimeisen vuosikymmenen aikana on tehty esimerkiksi pitkittäistutkimusta, vertailevaa tutkimusta, luotu kokeellisia malleja ja tutkittu kollektiivista minäpystyvyyttä. [25] Minäpystyvyys-uskon on todettu säilyvän melko samantasoisena alakoulusta yläkouluun [26]. Minäpystyvyys-usko muovautuu kokemuksista ympäristössä. [27] Saksalaisilla opiskelijoilla teetetyssä tutkimuksessa todettiin, että minäpystyvyys-usko ei vaihdellut erilaisia matematiikan tehtävätyyppejä kohtaan. Opiskelijat oli jaettu kahteen opetusryhmään, opettajalähtöiseen ja opiskelijalähtöiseen ja heidän minäpystyvyys-uskoaan testattiin alku- ja lopputesteillä. Opiskelijalähtöisessä opetuksessa olleiden opiskelijoiden minäpystyvyys-usko kasvoi opetuksen aikana eniten. [28]

Matematiikkakuvan komponentit määriteltiin uskomusten kautta, jotka perustuvat asenteisiin, subjektiiviseen tietoon ja tunteisiin, jotka taas muodostuvat henkilökohtaisen kokemuksen kautta. Ensimmäiseen komponenttiin, uskomuksiin itsestä matematiikan oppijana ja opettajana, liittyy vahvasti minäpystyvyyden käsite. Yliopistomatematiikassa minäpystyvyys-uskoa koetellaan itsenäistä opiskelua vaativalla kulttuurilla. Toiseen komponenttiin, uskomuksiin matematiikasta, sen opetuksesta ja oppimisesta, liittyy opiskelijoiden aiemmat kokemukset. Opiskelijoiden odotukset yliopistomatematiikan opetuksesta voivat olla ristiriidassa uusien kokemusten kanssa ja uskomukset saattavat näyttäytyä opetustapojen kyseenalaistamisella. Kolmanteen komponenttiin, uskomuksiin sosiaalisesta kontekstista, jossa oppiminen ja opetus tapahtuu, liittyvät luennoilla ja harjoituksissa vastaan tulevat sosiaaliset tilanteet. Näiden komponenttien näyttäytymistä opiskelijoiden kokemuksissa tarkastellaan tässä tutkimuksessa.

## 2.2 Matemaattinen todistaminen lukiossa ja yliopistossa

Matemaattinen todistaminen tarkoittaa suhteiden tai väitteiden todeksi osoittamista. Matematiikka perustuu logiikkaan. Kaikki termit ja käsitteet määritellään logiikan avulla, jotta niitä voidaan käyttää aksioomien ja sääntöjen muodostamiseen. Näitä käsitteitä ja aksioomia hyödyntäen voidaan todistaa tuloksia. Matematiikka on kumulatiivista, eli uudet asiat rakentuvat vanhojen varaan. Yleisesti hyväksytyt todis-

tustavat sekä todistamisen kieli on muodostunut viimeisen parin vuosisadan aikana. Todistustyyppinä ovat esimerkiksi suora, käänteinen, ristiriita-, geometrinen ja induktiotodistus. [29] Seuraavaksi esitetään esimerkit suorasta, käänteisestä ja induktiotodistuksesta. Esimerkkejä varten merkitään, että  $P(A)$  on joukon  $A$  potenssijoukko, eli se on kaikkien joukon  $A$  osajoukkojen joukko.

**Esimerkki 2.1.** (Suora todistus) Olkoon  $A$  ja  $B$  joukkoja. Jos  $P(A) \subseteq P(B)$  niin  $A \subseteq B$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $P(A) \subseteq P(B)$ . Osoitetaan, että  $A \subseteq B$ .

Valitaan jokin  $\alpha \in A$ . Nyt  $\{\alpha\}$  on joukon  $A$  osajoukko, joten  $\{\alpha\} \in P(A)$ .

Mutta koska  $P(A) \subseteq P(B)$  niin seuraa, että  $\{\alpha\} \in P(B)$ .

Tästä taas seuraa, että  $\{\alpha\} \subseteq B$  eli  $\alpha \in B$ .

Siis jos  $\alpha \in A$ , niin  $\alpha \in B$ , joten  $A \subseteq B$ . □

**Esimerkki 2.2.** (Käänteinen todistus) Olkoon  $A$  ja  $B$  joukkoja. Oletetaan, että  $A \subseteq B$  ja  $B \subseteq A$ . Väitetään, että  $A = B$ .

*Todistus.* Tehdään vastaoletus:  $A \neq B$ . Vastaoletuksen perusteella

$$(1) \quad \exists x \in X : x \in A \wedge x \notin B$$

tai

$$(2) \quad \exists x \in X : x \notin A \wedge x \in B$$

Tapauksesta (1) seuraa ristiriita, koska jos  $x \in A$ , niin oletuksen  $A \subseteq B$  perusteella  $x \in B$ . Vastaavasti tapauksesta (2) seuraa ristiriita oletuksesta  $B \subseteq A$ . Vastaoletus on siis väärä ja  $A = B$ . □

**Esimerkki 2.3.** (Induktiododistus) Osoitetaan induktioperiaatteen avulla, että kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  pätee

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Todistus.* Perusaskel. Yhtälö pätee kun  $n = 1$ , sillä  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus, että yhtälö on voimassa jollakin arvolla  $n = k$  ja  $k \in \mathbb{N}$ , eli

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Induktioväite. Yhtälö on voimassa myös, kun  $n = k + 1$ , joka todistetaan seuraavasti

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Johtopäätös. Siis yhtälö pätee kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . □

Esimerkeistä huomataan todistustyyppien eroavaisuudet. Suorassa todistuksessa väite on ehdollinen ja todistus rakentuu päätelmistä. Käänteisessä todistuksessa todistetaan väitteen kanssa loogisesti ekvivalentti tapaus. Induktiododistuksessa seurataan mekaanista kaavaa, joka koostuu perusasteleesta, induktioasteleesta ja johtopäätöksestä. Induktioasteleeseen kuuluu induktioväite ja todistus.

Todistamista koulumatematiikassa on tutkittu pro gradu -tutkielmien muodossa. Ville Mäkelä tutki todistamista suomalaisessa ja etelä-korealaisessa koulumatematiikassa. Hän käsittelee todistamisen pääsuuntauksia Suomessa, muuttuvassa koulumatematiikassa 1900-luvun loppupuolella ja huomaa todistamisen määrän romahtaneen 2000-luvulle saavuttaessa. Lisäksi Suomessa ”kaikki todistamiseen liittyvä aines on koottu yhteen lukion pitkän matematiikan valinnaiseen kurssiin Lukuteoria ja logiikka” Mäkelä huomaa. Hän tarkastelee kolmen eri kustantajan oppikirjaa kyseiselle kurssille. ”Lähestymistapa todistamiseen on omaksuttu logiikasta” ja ”tarkastellut oppikirjat ovat siis järjestäneet matemaattisen todistuksen opetuksen kokoelmaksi erilaisia todistusmenetelmiä”, hän toteaa. Kirjoissa käsiteltävät todistusesimerkit ovat suorasta todistuksesta, vastaesimerkistä, epäsuorasta todistamisesta ja induktiododistuksesta, joita kaikkia ei löydy kaikista tarkasteltavista teoksista. Mäkelä löytää todistuksista puutteita ja tärkeitä asioita on sivuutettu. Koreassa todistamiseen tutustutaan kahdeksannesta luokasta alkaen pienissä määrin jatkuvasti. [30]

Anna-Kaisa Viertola tutki todistamista pitkässä matematiikassa tarkastellen oppikirjoja ja ylioppilaskoetehtäviä sekä laatien oppituntipaketin todistamisen alkeisiin. Viertola etsi neljän eri oppikirjasarjan kurssikirjoista todistamistehtäviä ja kaiken kaikkiaan kirjojen tehtävistä yläkanttiin laskettuna todistamistehtäviä oli noin yhdeksän prosenttia. Myös hän toteaa syventävän kurssin Lukuteoria ja logiikka paneutuvan todistamiseen kattavammin, mutta löytää eri kustantajien aiempien lukiokurssien kirjoista viittauksia todistamiseen. Viertolan mukaan kevään 2002 koe on ainut 2000-luvun pitkän matematiikan koe, jossa ei ollut yhtään todistustehtävää. [31] Anssi Leino tutki todistamista pitkän matematiikan sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa. Hän tarkasteli myös pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksia ja löysi yhdeksän todistamistehtävää tarkatelllessa 34 koetta 2000-luvulta. Todistamisajattelua mittaavia tehtäviä löytyi kuitenkin enemmän. [32]

Mäkelän ja Viertolan tutkimusten aikoihin oli voimassa Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, joka määräsi Lukuteoria ja logiikka -kurssin tavoitteet ja keskeiset sisällöt. Kurssin keskeinen tavoite todistamisen osalta oli: ”oppii todistusperiaatteita ja harjoittelee todistamista” ja keskeinen sisältö: ”suora, käänteinen ja ristiriitatodistus”. Kurssi painottui logiikkaan ja sen käsitteisiin. [4] Leinon tutkimuksessa on otettu huomioon Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015, joka astui voimaan samaan aikaan, kun lukiota aloittelivat ne opiskelijat, jotka kirjoittavat matematiikan ylioppilaskokeen sähköisesti. Uusiin opetussuunnitelman perusteisiin pitkän matematiikan kurssirakennetta muutettiin ja aiemmin 11. kurssin nimi Lukuteoria ja logiikka muutettiin muotoon Lukuteoria ja todistaminen. Kurssin tavoite todistamisen osalta on pysynyt lähes samana: ”tutustuu todistusperiaatteisiin ja harjoittelee todistamista” mutta keskeisiin sisältöihin on tullut lisää: ”geometrinen todistaminen, suora, käänteinen ja ristiriitatodistus, induktiododistus”. [5] Todistamista on siis lisätty uusiin lukion opetussuunnitelman perusteisiin, jotka toimivat pohjana

lukiokoulutuksen järjestämiselle. Lopullisen päätöksen opetettavista sisällöistä tekee kuitenkin aina aineenopettaja, joka painottaa opetettavia asioita haluamallaan tavalla aikataulun puitteissa. Lisäksi todistamista käsittelevä kurssi on silti edelleen pakollisten pitkän matematiikan kurssien ulkopuolella, syventävänä kurssina.

Yliopistoilla on itsehallinto, eli ne päättävät itse tutkinto-ohjelmiensa sisällöistä. [33] Vuonna 2016 Tampereen yliopistossa matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma kuului Informaatitieteiden yksikköön. Tutkinto-ohjelman opinto-oppaassa 2015-2017 kuvataan seuraavia tavoitteita: ”Kandidaattiohjelmaan kuuluvat tutkinto-ohjelman perus- ja aineopinnot suoritettuaan opiskelija tuntee matematiikan keskeisiä osa-alueita ja hänellä on käsitys matematiikasta yliopistollisena oppiaineena. Opintojen aikana opiskelijan kyky abstraktiin matemaattiseen ajatteluun ja ongelmien ratkaisuun kehittyy. – – Maisteriopinnoissa opiskelija keskittyy matemaattisen teorian syventämiseen ja matematiikan tieteellisen erityisluonteen syvempään ymmärtämiseen sekä kehittää abstraktien struktuurien hahmottamiskykyään.” [6] Todistamista harjoitellaan tutkinto-ohjelman opintojaksoissa perusopinnoista syventäviin opintoihin asti. Esimerkiksi pakollisen Johdatus matemaattiseen päättelyyn -kurssin osaamistavoitteissa listataan relaatioita ja funktioita koskevien todistusten johtamista ja ymmärtämistä. [6] Yliopistomatematiikan opinnot koostuvat pääosin luennoista, joilla käydään läpi teoriaa, sekä harjoituksista, jotka tehdään itsenäisesti ja esitetään viikottaisissa harjoitusryhmissä. Opiskelijalta vaaditaan itsenäistä työskentelyä ja aktiivisuutta. Matematiikan opintoja tukemaan on olemassa Matematiikan työpaja, Matematiikkapaja, jonne voi mennä tekemään tehtäviä ja kysymään tarvittaessa apua ohjaajilta. Työpajaa järjestettiin lukuvuonna 2016-2017 kolmesti viikossa. [34]

Viertolan mukaan lukion opetussuunnitelman perusteissa 2003 matematiikan kohdalla mainitaan monessa kohtaa todistamisajatteluun viittaavia termejä: ”Jos tavoite perustelujen laatimisen ja niiden pätevyyden arvioinnin osalta saavutetaan, on todistaminenkin luultavasti jossain määrin hallussa.” Viertolan oppikirja-analyysin perusteella Lukuteoria ja logiikka -kurssin kirjojen teoriaosuuksissa on todistaminen huomioitu kiitettävästi. Hän kuitenkin epäilee kirjojen antavan positiivisen kuvan todistamisen asemasta pitkän matematiikan opetuksessa ja toteaa tutkimusmenetelmiensä kykenemättömyyden selvittämään asian todellista tilannetta. [31]

Opiskelijoiden todistamisajattelun kehittymisestä on oltu huolissaan jo jonkun aikaa. Tapio Keranto kirjoittaa artikkelissaan ”Kriittinen ajattelu ja tieteentuntemus matematiikan opetuksessa” koulumatematiikasta ja todistamisesta. [35] Keranto on huolissaan siitä, että koulumatematiikassa opetetaan yksittäisiä, toisistaan erillisiä asioita, kuten aritmetiikkaa tai ”funktio-oppia”, ”objektiivisina ja kiistämättöminä totuuksina”. Hän pohtii: ”kun opiskellaan tällä tavalla, oppilaiden on mahdotonta päästä perille niistä asiayhteyksistä, konteksteista, joiden jäsentämistä varten kyseinen symboliikka sekä algoritmiset prosessit on alunperin kehitetty”. Hän hahmottelee artikkelissaan ”mitä matematiikan opetuksessa voitaisiin viimeistään lukiotasolla tehdä, jotta opetuskäytänteet tukisivat paremmin tieteellisluontoisen kriittisen ajattelutavan kehittymistä”. Hän perustelee ehdotuksiaan etenkin siksi, että ”kriittisen tiedonhankintametodin merkitys” säilyy sukupolvesta toiseen, vaikka ”saavutettu tietämys” muuttuisi. Hänen mielestään ”aivan liian harvoin ja satunnaisesti oppilaille

itselleen annetaan mahdollisuus 'ajatella tiensä' tiedonalueelle, väitellä erilaisista ratkaisuvaihtoehdoista ja perusteluista sekä keskustella yleisemmällä tasolla erilaisen perustelujen oikeutuksesta matematiikassa." Myös Silius ym. toteavat: "Koulukursseissa ja ylioppilaskirjoituksissa ei yleensä esiinny ongelmanratkaisutehtäviä, joissa opiskelija itse joutuisi ensin muovaamaan ongelman ratkaistavaan muotoon ja sitten vasta valitsemaan ratkaisustrategian." [8] Kerannon mielestä "keskustelu ja argumentointi tulisi nostaa opetuksen ja oppimisen keskeiseksi metodiksi". Tällaisen mahdollisuuden toteutuminen vaatisi itsenäistä ajattelua herättäviä tehtäviä ja kysymyksiä sekä muutoksia arviointiin: "oppilaita tulisi ohjata näkemään, että yksimielisyys opettajan ja kavereiden kanssa ei ole välttämätöntä korkeiden arvosanojen saavuttamiseksi, mutta itsenäinen, monipuolisesti ja asiallisesti evidenssiin sitoutuva ajattelu on". [35] Tämä edellyttäisi koulu- ja yliopistomatematiikan käytäntöjen lähennyttämistä toisiinsa, mutta auttaisi myös lukiotasolta yliopistoon siirryttäessä.

## 2.3 Matematiikan kielentäminen

Kieli on väline ihmisten väliselle kommunikaatiolle, joka sisältää tässä yhteydessä puhuttua ja kirjoitettua kieltä sekä kuvia, ilmeitä ja eleitä. Kielentäessään opiskelija tuo esiin ajatusprosessiaan muille eri tavoin. Matematiikan kielentäminen (*language*), tarkoittaa matemaattisen ajattelun ilmaisemista luonnollisen kielen avulla suullisesti ja kirjallisesti sekä symbolikielellä, kuvioita ja toimintaa apuna käyttäen. [14] [36] Matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan matemaattisen tiedon prosessointia, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot eli yksilön omien kognitiivis-emotionaalisten prosessien tiedostaminen. [37] Matemaattisella kielentämisellä pyritään tuomaan opiskelijalle lisää työkaluja matemaattisen asian esittämiseen. [38] Matematiikan tehtävissä tulosten esittäminen on perinteisesti painottunut symbolikielen käyttämiseen, joskus kuviokieltä käytetään rinnalla. Kielentämisen avulla vastauksen tuloksija pääsee syvemmälle esityksen tekijän ajatuksenkulkuun, sillä esittäjä joutuu tuomaan asiaansa esille monin tavoin ja ehkä kääntämään eri kielestä toiseen. Kielentämisen avulla vastauksesta voi nähdä oppijan uskomuksia aiheesta, joita ei saisi selville pelkästään symbolikielellä kirjatusta vastauksesta. [39] Tavoitteena on antaa opiskelijan itse valita hänelle luontainen kieli tai kielet, joilla esittää asiansa. Kirjallinen kielentäminen tarkoittaa matematiikassa symbolikielen, luonnollisen kielen ja kuviokielen käyttämistä kirjallisesti. Kirjoitettu ratkaisu tulee jäsenellä opiskelijan mielessä ennen lopullisen vastaamisen kirjaamista. [38]

Kielentämistä on tutkittu yliopistomatematiikan opetuksessa esimerkiksi Tampereen Teknillisellä yliopistolla vuosina 2010 [40] ja 2015 [41]. Myös erilaisia kielentämistehtävätyyppejä on tutkittu matematiikan opetusta ja oppimista varten yliopisto- ja lukiotasolla. [42] Kielentäminen ohjasi opiskelijoita perustelemaan ratkaisujaan. Opiskelijat kokivat luonnollisen kielen käytön selkeyttäneen heidän tekemiään ratkaisuja [40] ja kielentämisen vaikuttaneen oppimistuloksiin positiivisesti [40] [41]. Pääasiassa kielentämiseen suhtauduttiin positiivisesti, vaikka tehtävät koettiin joskus työläiksi. [41] Candia Morganin mukaan matematiikan tehtävien ratkaisuihin monipuolinen kirjoittaminen edistää matematiikan oppimista, matematiikan ymmär-

tämistä, parantaa oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan ja helpottaa opettajan arviointia. Tämä voi kuitenkin olla haastava tehtävä oppilaille. [43]

Joutsenlahti ja Rättyä [38] tiivistävät hyvin tutkimusten tuloksista (kts. esim Bauersfeld [44], Joutsenlahti [36], [37], Morgan [43]), mitä hyötyä matemaattisen ajattelun kielentämisestä on oppimiselle ja opettamiselle:

1. ”kielentäjän oman ajattelun jäsentyminen ja ymmärryksen kasvu käsitteistä ulkoisen puheen tai kirjoitetun tekstin tuottamisen kautta,
2. vertaisryhmän jäsenten matemaattisen ajattelun kehittyminen reflektioivassa vuorovaikutuksessa muiden kielentävien oppijoiden kanssa ja
3. oppijoiden matemaattisen ajattelun ja osaamisen arviointi osana opettajan arviointi- ja suunnittelutyötä. Nämä näkökulmat ovat löydettävissä kaikissa ikäluokissa alakoulusta korkeakouluopiskeluun.”

Kielentämistehtäviä on kehitelty erilaisia. Esimerkiksi täydennystehtävässä tulee puutteelliseen matematiikan kirjallisessa muodossa esitettyyn tehtävään täydentää puuttuvat kohdat. Virheenetsintätehtävässä tulee etsiä virheelliset tai puuttuvat kohdat ratkaisusta. Kohdat tulee täydentää tai korjata. [40] Tässä tutkimuksessa teetettiin opiskelijoilla kaksi kielentämistehtävää, virheenetsintä- ja täydennystehtävä, jotta voitiin kysyä, auttoivatko kielentämistehtävät oppimisessa.

### 3 Tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, minkälaisia kokemuksia ensimmäistä vuotta matematiikkaa opiskelevat, lukiotaustaiset opiskelijat, saivat matematiikan opiskelusta Tampereen yliopistossa syyslukukautena 2016. Tutkimuksessa tarkasteltiin myös, miten ja millaisena opiskelijan matematiikkakuva näyttäytyi kokemuksissa. Yliopistomatematiikka koostuu pääosin todistamisesta, joten tutkimusta varten kysyttiin myös, kuinka opiskelijat ymmärtävät matemaattisen todistamisen ja auttoivatko kielentämistehtävät todistamisajattelun ymmärtämisessä. Tutkimuksen tarkoituksena oli löytää kehitettäviä asioita matematiikan opetuksessa Tampereen yliopistossa, joten selvitettiin myös, miten opiskelijat kehittäisivät opetusta. Tutkimuksessa pyrittiin vastaamaan seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Millaisena ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevat kokevat yliopistomatematiikan opiskelun lukioon verrattuna?
  - 1.1. Millaisena opiskelijan matematiikkakuva näyttäytyy kokemuksissa?
2. Miten ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevat ymmärtävät matemaattisen todistamisen?
3. Millä tavoin kielentämistehtävät vaikuttivat todistamisen idean ymmärtämisessä?
4. Miten opiskelijat kehittäisivät yliopistomatematiikan opetusta?



## 4 Tutkimuksen toteutus

Kvalitatiiviseen aineiston käsittelyyn ja analysointiin on monenlaisia vaihtoehtoja, jotka sallivat erilaisia lähestymistapoja. Tutkimusmenetelmä tulee valita siten, että se parhaiten avaa tutkittavaa aihetta. [45]

Tutkimuksen taustafilosofiana toimi fenomenologinen tutkimusote, joka tutkii sitä, miten ihminen ymmärtää todellisuuden ja kokee maailman. Tavoitteena oli kuvata ilmiö sellaisenaan kuin se ilmenee kokijalleen merkityssuhteina ja tiedostaa sekä sulkeistaa tutkijan omat ennakkokäsitykset aiheesta. Aineistolähtöinen asetelma oli menetelmän perusta. [46] Tutkimuksessa huomioitiin myös ilmiön konteksti, sillä kokemukset ovat aina suhteessa siihen. [47] Tämän tutkimuksen näkökulma oli kvalitatiivinen tapaustutkimus. Tarkoituksena oli paneutua muutaman opiskelijan kokemuksiin syvällisesti. Tutkimukseen osallistuneiden ääni tuotiin esiin, jotta saatiin kuvattua tutkittavaa ilmiötä kokonaisvaltaisesti. [48]

### 4.1 Mittarin esittely

Opiskelijoilla toteutettiin ennakkokysely, kaksi kielentämistehtävää ja loppukysely. Kyselyiden ja kielentämistehtävien perusteella opiskelijoita kutsuttiin haastatteluun. Ennakkokyselyssä kartoitettiin opiskelijoiden pohjatietoja, matematiikkakuvaa 31 väitteen väitekokoelmalla ja käsitystä todistamisesta avoimella kysymyksellä (Liite 1). Lisäksi kysyttiin opiskelijan suostumusta haastatteluun myöhemmin. Matematiikkakuvan väitekokoelman laadinnassa hyödynnettiin mm. Joutsenlahden [14] käyttämää testattua väitekokoelmaa. Kaikkia Joutsenlahden käyttämiä väitteitä ei koettu tämän tutkimuksen kannalta tärkeiksi, joten muutama väite jätettiin pois. Kyselyyn lisättiin väitteet 3, 7, 14, 16, 19, 20, 21, 23, 25, 28, 29 sillä niiden koettiin avaavan tutkittavaa asiaa. Kyselyn väitteet voidaan jakaa luvussa 2.1 määritellyyn matematiikkakuvan komponentteihin taulukon 4.1 mukaisesti. Kielentämistehtävien avulla

Taulukko 4.1: Väitteet jaettuina matematiikkakuvan komponentteihin

Komponentti	Väitteen numero
I	14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
II	1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 28, 29
III	7, 8, 9, 10, 11, 30, 31

opiskelijat tutustuivat matematiikan kielentämiseen. Kielentämistehtävät olivat täydentämisestä ja virheen etsimisestä (Liite 2). Loppukyselyssä selvitettiin erilaisilla avoimilla kysymyksillä opiskelijoiden ajatuksia ja kokemuksia matematiikan opiskelusta Tampereen yliopistossa (Liite 3). Loppukyselyssä kysyttiin myös mielipidettä kielentämistehtävistä ja uudelleen käsitystä matemaattisesta todistamisesta. Teema-haastatteluilla pureuduttiin yksittäisten opiskelijoiden kokemuksiin. Puolistrukturoidussa teemahaastattelussa haastattelijalla ei ole valmista kysymyslistaa, vaan lista ai-

heista, joita voidaan haastateltavan kanssa käsitellä. Käytetty aihelist löytyy liitteestä 4. Haastattelija ohjaa keskustelun kulkua, mutta haastateltava määrää sen suuntaa. [49] Haastattelutyylisiä johtuen kaikkien haastateltavien kanssa ei keskusteltu syvällisesti kaikista aiheista. Teemahaastattelussa käsiteltiin tutkimuskysymysten teemoja: odotuksia ja kokemuksia yliopisto-opiskelusta ja -matematiikasta, matemaattisesta todistamisesta, kielentämisestä todistamisen yhteydessä ja yliopistomatematiikan opetuksen kehityskohteita.

## 4.2 Aineiston hankinta

Tutkimuksen otannaksi valittiin Tampereen yliopiston Johdatus matemaattiseen päättelyyn-kurssin opiskelijat, sillä kurssi kuuluu matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelman ensimmäisiin perusopintoihin ja sitä suositellaan myös esimerkiksi tietojenkäsittelytieteen opiskelijoille. Ensimmäisen vuoden opiskelijoille suositellaan kurssin käymistä ensimmäisenä syksynä, joten kurssin avulla sai tavoitettua suurimman osan ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevista. Kurssille ilmoittautui vuoden 2016 syksyllä 75 opiskelijaa.

Aineiston keräämisen aluksi esittäydettiin Johdatus matemaattiseen päättelyyn-kurssin opiskelijoille ja kerrottiin tutkimuksen kulusta. Kurssin opiskelijoille lähetettiin sähköpostilla kutsu vastata e-lomakkeella ennakkokyselyyn (Liite 1). Kyselystä muistutettiin viikon ja jälleen kahden viikon kuluttua. Ennakkokyselyyn vastasi 36 opiskelijaa, joista 29 ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevia.

Kurssin puolesta välissä opiskelijoilla teetettiin kaksi kielentämistehtävää jakamalla luennolla kaksipuoleinen tehtäväpaperi (Liite 2), ja samat tehtävät jaettiin myös kurssin Moodleen. Tehtävän sai palauttaa luennolle tai sähköisesti Moodleen. Kielentämistehtäviä palautti 18 opiskelijaa, joista 17 oli tehnyt molemmat tehtävät ja yksi vain toisen. Ensimmäisessä tehtävässä piti löytää virhe ja perustella todistuksen vaiheet. Toisessa tehtävässä tuli täydentää puuttuvat kohdat ja perustella todistuksen vaiheet. 15 opiskelijaa löysi virheen ja 13 täydensi kaikki kohdat oikein. Kaikki tehtävän palauttaneet käyttivät luonnollista kieltä. Kahdeksan käytti kuviokieltä ainakin toisessa tehtävässä, kaksi molemmissa. Kolme opiskelijaa teki virheitä luonnollisella kielellä kirjoitetussa päättelyssä. Kurssin lopuksi opiskelijoille lähetettiin sähköpostikutsu vastata loppukyselyyn (Liite 3). Kyselyyn vastasi 22 opiskelijaa, joista 17 ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevia.

Kyselyiden vastausten määrä oli liian pieni kvantitatiivisten menetelmien hyödyntämiseen, joten vastauksille tehtiin sisällönanalyysia. Sisällönanalyysissä ”aineistoa tarkastellaan eritellen, yhtäläisyyksiä ja eroja etsien ja tiivistäen”. [50] Kyselyiden vastausten ja kielentämistehtävien perusteella haastatteluun kutsuttiin yhdeksän kurssilaisista, jotka olivat antaneet suostumuksensa haastatteluun, ja joista kolmella oli positiivinen suhtautuminen yliopistomatematiikan opiskeluun, kolmella negatiivinen ja kolmella neutraali tai epävarma. Haastatteluun saapui lopulta kahdeksan opiskelijaa. Haastattelut toteutettiin alkuvuodesta 2017. Taulukkoon 4.2 on kerätty aineiston hankintatavat ja ajankohdat.

Haastattelujen litterointi ja lukeminen tapahtui keväällä 2017. Litteroinnissa jä-

Taulukko 4.2: Aineiston hankittavat ja ajankohdat

Menetelmä	Ajankohta
Ennakkokysely	syyskuu 2016
Kielentämistehtävät	lokakuu 2016
Loppukysely	joulukuu 2016
Haastattelut	tammi-helmikuu 2017

tettiin kirjoittamatta täytesanoja ja joitain haastattelun aihepiiriin kuulumattomia virkkeitä. Tekstimuotoista aineistoa syntyi kahdeksasta, kestoltaan 27-43 minuutin välillä vaihtelevasta haastattelusta reilu 30 000 sanaa. Haastateltavien nimet on yksityisyyden suojan nimissä muutettu järjestysluvulla tunnistettaviksi opiskelijoiksi. Haastateltavista kuusi opiskelijaa on matematiikan pääaineopiskelijoita (1, 2, 3, 4, 6, 8) ja kaksi sivuaineopiskelijoita (5, 7), jotka kuitenkin opiskelivat matematiikkaa ensimmäistä vuottaan. Opiskelija 7 on toisen vuoden ja opiskelija 5 kolmannen vuoden opiskelija. Myöhemmin tässä tutkielmassa opiskelijoista käytetään lyhennettä ”OP” numeron kanssa.

### 4.3 Analysointimenetelmät

Tutkimusaineistoa analysoitiin aineistolähtöisesti mutta teoria auttoi tulkintojen tekemisessä. Fenomenologisen tutkimusotteen mukaisesti tarkoituksena oli ymmärtää opiskelijoiden kokemuksia sellaisenaan, eikä tulkita niitä teorian pohjalta. [46] Esimerkiksi matematiikkakuvan teorian luvussa 2.1 muodostamien käsitteiden avulla tarkasteltiin opiskelijoiden kokemuksissa näyttäytyviä matematiikkakuvan piirteitä.

Kyselylomakkeista saatua aineistoa analysoitiin kokonaisuutena, jonka perusteella opiskelijoita pyydettiin haastatteluun. Väitteitä analysoitiin MS Excel-ohjelmistolla kvantitatiivisesti ja kvalitatiivisesti. Väitteiden analysointia varten negatiiviset väitteet käännettiin positiivisiksi kvantitatiivista analyysia varten. Esimerkiksi väite ”Matematiikkaa ei tarvita jokapäiväisessä elämässä” käännettiin muotoon ”Matematiikkaa tarvitaan jokapäiväisessä elämässä” ja ”Samaa mieltä” käännettiin vaihtoehdoksi ”Eri mieltä”. Likert-asteikko pelkistettiin ”Samaa mieltä” ja ”Eri mieltä”-väitteisiin. Väitteiden vastaukset luokiteltiin positiivisiin ja negatiivisiin.

Litteroinnin jälkeen aineistoa luettiin läpi moneen kertaan. Haastatteluja hahmoteltiin ajatuskarttojen avulla ja niille tehtiin sisällönanalyysiä. Tämän jälkeen aineistoa alettiin tematisoimaan eli ryhmittelemään teemoihin. Tematisoinnilla saadaan aineistosta nostettua esiin tutkimuskysymyksiin vastaavia teemoja. [51] Ennen analysointia aineistosta oletettiin nousevan tutkimuskysymysten mukaisia teemoja, eli odotuksia ja kokemuksia yliopisto-opiskelusta ja -matematiikasta, matemaattisesta todistamisesta, kielentämisestä todistamisen yhteydessä ja yliopistomatematiikan opetuksen kehityskohteita. Analysoinnin aikana hahmottuneet teemat vastasivat tutkimuskysymyksiä. Lisäksi kokemukset opiskelusta jakaantui haastattelujen perusteella kokemuksiin luennoista ja harjoituksista, kysymisestä ja materiaaleista.

## 5 Tutkimuksen tulokset

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen tulokset. Luvussa käsitellään ensin kyselyiden tulokset ja kielentämistehtävät, jonka jälkeen tarkastellaan opiskelijoiden kokemuksia haastatteluiden perusteella. Matematiikkakuvan näyttäytymistä kokemuksissa tarkastellaan haastattelujen ja kyselyiden perusteella. Käsityksiä matemaattisesta todistamisesta käsitellään kyselyiden ja haastattelujen pohjalta. Matemaattisen kielentämisen vaikutusta todistustehtävien ymmärtämisessä tarkastellaan kielentämistehtävien, loppukyselyvastausten ja haastattelujen näkökulmasta. Tutkimuksessa on merkitty kursiivilla suorat lainaukset opiskelijoiden vastauksista.

### 5.1 Kyselyt

Ennakkokyselyyn (Liite 1) vastasi 29 ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevaa. Ennakkokyselyssä kysyttiin väitekokoelman ja taustatietokysymysten lisäksi myös opiskelijoiden käsitystä matemaattisesta todistamisesta. Opiskelijat kuvailevat matemaattista todistamista kurssin alkupuolella esimerkiksi seuraavilla sanoilla: *perustelua, johtamista, osoittamista, yleistämistä ja havainnollistamista. Jonkin väitteen todistamista erilaisia matemaattisia ja tunnettuja menetelmiä käyttäen. Väite johdetaan yksinkertaisemmista kaavoista ja välivaiheista.* kuvailee eräs vastaaja. Yhdeksän opiskelijaa käytti kuvailemiseen verbiä *todistaa*.

Loppukyselyyn (Liite 3) vastasi 17 ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevaa. Kyselyssä kartoitettiin opiskelijoiden ajatuksia yliopistomatematiikan opiskelusta syyslukukauden lopussa. Opiskelijat jatkoivat lausetta ”Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin...” monipuolisilla metaforilla. Lauseet jaettiin positiivisiin, negatiivisiin ja neutraaleihin lauseisiin opiskelijoiden muiden vastausten avulla. Positiivisissa lauseissa esiintyi harrastuksiin liittyviä ilmaisuja, kuten *kirjan lukemista ja aurinkolomaa*. Negatiivisissa esiintyi kuvauksia *raskaasta työstä*, kuten *suossa tarpomista, metsän raivaamista*. Neutraaleissa käsiteltiin *pohtimista, kielen suomentamista, uuden aiheen vastaanottamista*. Yksi vastaus oli tutkielman otsikkoonkin päättynyt *pään hakkaamista seinään*, joka voi tarkoittaa opiskelijasta riippuen ahdistusta ja turhautumista omasta osaamattomuudesta tai kuvata sitä jatkuvaa työstämistä, minkä avulla abstraktejakin asioita lopulta ymmärtää. Kaikki vastaukset löytyvät liitteestä 5.

Yliopistomatematiikan opiskelusta opiskelijoille tulee mieleen ensimmäisenä *työmäärä ja todistaminen sekä abstraktit käsitteet*. Opiskelijat käyttivät myös tunteita kuvaavia sanoja, kuten *rentoa, tuskallista tai hankalaa*. Matematiikan opiskelu Tampereen yliopistossa on tuntunut monista mukavalta ja sopivan haastavalta, mutta myös vuoristoradalta ja vaativalta.

Kysymys numero kaksi käsitteli yliopisto- ja lukiomatematiikan opiskelun eroja. Opiskelijat mainitsevat opiskelun olevan yliopistossa itsenäisempää, mutta vapaampaa ja aikaa tehtävien tekemiseen on enemmän. Toisaalta opiskelu vaatii enemmän työtä ja asiassa mennään syvemmälle. Aiheet ovat abstrakteja ja painottuvat loogiseen

päättelyyn sekä todistamiseen, harvemmin lasketaan. Lisäksi luennot jakautuvat eri tavalla suhteessa lukio-opiskeluun, tehtäviä tehdään ainoastaan vapaa-ajalla. Kursseilla on paljon opiskelijoita ja jokaiseen kurssiin on sisällytetty paljon asiaa sekä isoja kokonaisuuksia. Luokkahenki puuttuu ja kontakti opettajaan on vähäistä. Myös tahti on nopea ja itse on oltava aktiivinen.

Opiskelijat kokevat vaihtelevasti lukio- ja yliopistomatematiikan erojen vaikuttavan oppimiseen. Osa kokee yliopisto-opiskelun mielekkäämmäksi ja yliopistomatematiikan opetustavan sopivaksi itselleen. Osa pelottaa oma oppiminen, opetustahti koetaan nopeana eikä ohjausta tehtävien tekoon ole riittävästi tarjolla. Jokunen opiskelija toteaa, ettei uusi opiskelutyyli sovi heille, sillä luentoja pidetään liian harvoin ja kerralla käsitellään liian isoja paloja, motivaatio on laskenut. Muutamat eivät osaa sanoa, joku uskoo tottuvansa uuteen tapaan.

Vaikeaksi Johdatus matemaattiseen päättelyyn -kurssilla opiskelijat kokivat yleisesti todistamisen, kurssin loppupuolen asiat, merkinnät ja käsitteet sekä *sen keksiminen mitä pitää tehdä*, etenkin todistustehtävissä. Syitä tähän olivat opiskelijoiden mukaan vähäinen tai olematon kokemus todistamisesta, ja ongelmat uusien asioiden liittämässä jo olemassa olevaan tietoon. Kiireestä johtuen asioihin ei ehtinyt syventyä kunnolla.

Helpoksi kurssilla koettiin joukko-oppi ja relaatiot. Muutama vastaajista koki induktio- tai vastaesimerkin avulla todistamisen helppoina asioina, mutta heidän mielestään kaikki muut todistustyyliä olivat vaikeita. Osa vastanneista oli sitä mieltä, ettei kurssilla ollut helppoja asioita. Helpot asiat koettiin *loogisiksi, mekaanisiksi, suoraviivaisiksi* tai ne olivat ennalta tuttuja. Myös kurssin luennoitsijaa kehuettiin hyväksi opettajaksi, koska hän havainnollisti ymmärrettävällä tavalla ja selitti asioita hyvin.

Loppukyselyssä (Liite 3) matemaattista todistamista kuvailtiin sanoilla *yleistämistä, toteamista* ja *osoittamista*. Neljä opiskelijaa käytti *todistamista* kuvailevana verbinä. Taulukkoon 5.1 on kerätty ennako- ja loppukyselyssä esiin nousseet verbit ja sanaparit, joilla opiskelijat kuvailevat matemaattista todistamista.

Kielentämistehtävät edistivät oppimista edes vähän seitsemän opiskelijan mielestä. He kuvailevat kielentämistehtävien selventäneen tai avanneen käsiteltävää asiaa. Myös *käsitteet jäivät ehkä paremmin mieleen*. Yksi opiskelija koki tehneensä *kääntämistä symbolikieleltä luonnolliselle kielelle* mielessään jo aiemmin. Kolme opiskelijaa ei kokenut tehtävien edistäneen oppimista. Loput vastanneista eivät olleet tehneet vapaaehtoista tehtävää, mutta yksi uskoi, että tehtävä olisi auttanut häntä.

## 5.2 Haastateltavat

Kyselyiden perusteella OP2, OP4 ja OP6 on positiivinen suhtautuminen yliopistomatematiikan opiskeluun, OP1, OP5, OP8 on negatiivinen suhtautuminen ja OP3 ja OP7 on neutraali tai epävarma suhtautuminen. OP3 on ainoa lyhyen matematiikan lukija ja kirjoittaja. OP5 on kasvatustiedettä ja OP7 tietojenkäsittelytiedettä pääaineena lukeva sivuaineopiskelija. Haastattelujen perusteella opiskelijat jaettiin kahteen uuteen ryhmään.

Taulukko 5.1: Opiskelijoiden kuvaukset matemaattisesta todistamisesta kurssin alussa ja lopussa

Alussa	Lopussa
loogista päättelyä selittämistä aukottomasti yleistämistä perustelemista todistamista todeksi tai epätodeksi löytämistä ja soveltamista osoittamista todeksi tai oikeaksi väitteiden toimivaksi osoittamista ymmärtämistä väitteen johtamista keksitään tapa sanoa asia toisin havainnollistamista kaavojen syntymisen seuraamista kaavojen johtamista pätevää päättelyä	loogista ajattelua ja päättelyä selittämistä yleistyksien tekemistä perustelemista väitteen todistamista todeksi pyörittelyä todentamista ja osoittamista pitäväksi /pitämättömäksi

Ensimmäisen ryhmän opiskelijat OP1, OP2, OP4 ja OP6, kokevat matematiikan opiskelun yleishyödyllisenä ja he ovat hakeneet koulutukseen nimenomaan matematiikan takia. Nämä opiskelijat ovat tyytyväisiä matematiikan opiskeluunsa. Ryhmästä käytetään nimeä *Tyytyväiset*. OP1 ja OP4 halusivat tehdä työkseen jotain muuta kuin matematiikkaan liittyvää, koulutukseen hakeutuminen oli varavaihtoehto koska pitivät matematiikasta, mutta he aikovat hakea opiskelemaan toista alaa. OP1 suhtautui kyselyjen perusteella negatiivisesti yliopistomatematiikan opiskeluun, hän esimerkiksi jatkoi lausetta ”Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin...” sanoin: *eksyminen, mitä enemmän tutkit ympäristöä, sitä enemmän huomaat olevasi hukassa*. Loppukyselystä oli kulunut kaksi kuukautta ja kevään kurssit olivat ehtineet alkaa, kun hän oli haastateltavana. Haastattelussa kävi ilmi, että OP1 kokee yliopistomatematiikan yleishyödyllisenä itselleen: *en mä usko että tää on tavallaa turha ollu vaikka mä meenki ihan eri alalle...kyl mä uskon et se on kehittänyt jotenki*. OP1 on kiinnostunut opettajana työskentelemisestä ja *matikka tuli siitä et se on ollu mulla aina se oma aihe tavallaa*, joten hän päätyi Tyytyväisiin. OP4 on kiinnostunut matematiikasta ja aikoo suorittaa kandidaatin tutkinnon Tampereen yliopistossa, mutta *tykkään enemmän semmosesta fyysisestä työstä nii sen takia matikka ei ehkä [työnä], vaikka se onki erittäin kiinnostavaa*. Hän on myös innostunut tutkimaan opiskeltavia asioita myös vapaa-ajalla, joten hänetkin sijoitettiin Tyytyväisiin. OP2 ja OP6 ovat tyytyväisiä valintaansa. OP2 pääsi opiskelemaan muutaman vuoden haun jälkeen ja on suunnitellut tulevaisuuttaan aineenopettajana. OP6 on suorittanut opintoja toisaalla, mutta kokee vasta nyt löytäneen oman alansa matematiikan parissa, erityisesti Tampereen yliopistossa.

Toiseen ryhmään kuuluvat OP3, OP5, OP7 ja OP8. Ryhmän opiskelijat ovat pet-

tyneitä saamiinsa kokemuksiin yliopistomatematiikan opiskelun parissa. OP8 aikoo hakea muualle, OP3 vaihtaa pääainetta tilastotieteeseen ja OP5 ja OP7 lukevat matematiikkaa sivuaineenaan. Ryhmästä käytetään nimeä *Pettyneet*. OP3 ja OP7 olivat kyselyiden perusteella hieman epävarmoja suhtautumisestaan matematiikan opiskeluun. Haastatteluiden avulla opiskelijoiden syvällisempi kokemus saatiin esiin. OP3 halusi opiskella matematiikan aineenopettajaksi, mutta huomasi ensimmäisten yliopistokurssien aikana kiinnostuneensa enemmän tilastotieteestä. Opiskelija on helpottunut siitä, ettei hänen tarvitse suorittaa vaikeampia matematiikan kursseja. OP3 pettyi yliopistomatematiikan opiskelun vanhanaikaisuuteen: *nyt mä en sit opi niitä [tietokoneohjelmistoja] niinku ikinä ku täälä tehdään vaa kynällä ja paperilla, että kun eihän ny oikeesti työelämässä tehä kynällä ja paperilla yhtään mitään*. Kaikki ryhmän jäsenet kokevat yliopistossa opiskeltavan matematiikan ja työelämän yhteyden heikoksi. Sivuaaineopiskelijat eivät koe saaneensa yliopistomatematiikan opiskelusta tukea tulevaa työelämää varten, vaan opintojen koetaan olevan irrallisia. *mä en nää et mä olisin hyötyny niinku mitään siihen konkreettiseen ohjelmointiin matikasta vielä ainakaa* (OP7) ja *mä en koe että nää opinnot vastaa täysin sitä mitä se mun työ tulee olemaan, että se jää tosi hataraks se niinkun linkki, että kun asiat mitä mä opiskelen täällä ei ees vastaa sitä mitä mä oon ennen opiskellu* (OP5). OP8 on kokenut matematiikan erityisen vaikeaksi ja hänelle on tullu semmonen olo etten mä kyl halua jatkossa opiskella matikkaa, siin menee niin pahasti hermo ku ei ymmärrä.

### 5.3 Kokemuksia

Ensimmäinen tutkimuskysymys koskee opiskelijoiden kokemuksia yliopistomatematiikan opiskelusta Tampereen yliopistossa. Haastatteluaineistosta nousi esiin seuraavia teemoja: kokemuksia luennoista, harjoituksista, kysymisestä ja materiaaleista. Ensin käsitellään lyhyesti ryhmien kokemuksia yleisesti, jonka jälkeen tarkastellaan teemojen mukaisia kokemuksia.

Tyytyväiset kokevat yliopisto-opiskelun olevan heille luontevaa ja yliopistomatematiikan opiskelun mielenkiintoista. Opiskeluissa ei ole tullut suurempia esteitä ja he ovat sopeutuneet luentojen ja harjoitusten rytmittämään opiskeluelämäänsä hyvin. Opiskelijat jatkavat lausetta ”Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin...” esimerkiksi sanoilla *pohtimista* tai *näkökulmien laajentamista*. Yliopistomatematiikka koetaan haastavaksi, mutta opiskelijat luottavat että ajan kanssa asiat helpottuvat.

Pettyneet ovat kohdanneet vastoinkäymisiä. Joko heillä on ollut tiedostettuja puutteita esitiedoissa tai yliopistomatematiikan opiskelu on koettu ylitsepääsemättömän vaikeaksi. He tunnistavat, että matematiikan opiskeluun tulisi käyttää runsaasti aikaa, mutta esimerkiksi sivuaaineopiskelijat kokevat, etteivät voi liikaa panostaa sivuaineeseen pääaineen kustannuksella. Pettyneillä odotukset eivät vastanneet saatuja kokemuksia. Opiskelijoita hämmensi *liitutaulut*, *luennoitsija kirjottaa* (OP3), tietokoneohjelmistojen vähäinen hyödyntäminen ja etenkin se, ettei opiskeltavia asioita liitetä työelämään mitenkään. Pettyneet eivät koe, että yliopistomatematiikan opiskelusta olisi heille mitään hyötyä työelämää varten, mutta arvailevat, että *ajattelutapaan ja siihen niinku logiikkaan saattaa auttaa* (OP7).

### 5.3.1 Luennoista

Tyytyväiset kokevat luennot usein tarpeellisina ja ovat sopeutuneet opetustyyliin. OP4 mielestä: *jos skippaa jonkun luennon tai et menee päällekkäin nii sit jää aika paljon ittelle opiskeltavaa että luennot on kyl iha hyviä*. Luennoitsijan tyyli vaikuttaa kuulijan kokemukseen. *Se osas selittää, sen puhetapa oli semmost et sitä oli mukavaa seuraa, eikä se ollu tasapaksuu puhetta*, muistelee OP7. Kertaus luennon aluksi koetaan hyväksi, *yhel professoril on ollu sellai tapa et ain luennon aluks menee joku viis minuuttii siit et se selostaa et mitä nyt on tyylii viime ja edellisel luennol tehty et sillee tavallaa kokoo sen nopeesti siihe ja sitte niinku jatkaa taas eteenpäin et se on ollu kyl tosi hyvä*, mainitsee OP1.

Luennoille tullaan kuuntelemaan opettajan selittämistä käsiteltävästä asiasta. Sekä Tyytyväiset että Pettyneet kaipaavat lisää ja erilaisia esimerkkejä luennoille. Mikäli luennoitsija ei tuo puheessaan mitään lisää olemassa olevaan luentomateriaaliin tai kirjoittaa taululle kertomatta laajemmin aiheesta, koetaan luennot kuitenkin turhiksi. OP6 toteaa: *luennon idea menee siinä hukkaan jos se opettaja ei ees selitä sitä*. Luennoilla esitetyt uudet esimerkit motivoivat opiskelijoita käymään luennoilla. OP5 kokee: *mä saisin luennolta paljon enemmän irti, että sillon se motivois mua myös menee enemmän sinne luennoille, ku mä tiän et sielt tulee jotain mitä materiaalissa ei ole*. Ensimmäisillä syksyn kursseilla esimerkiksi OP1 koki opiskelleensa käsiteltävän asian tehokkaammin itsenäisesti luentomonisteesta, mutta kevään kursseilla koki luennot tärkeiksi. OP1 muistelee: *oli muutamii kursei tos syksyllä et ei tullu mitää ylimäärästä sinne taululle et se kirjotti ja puhu sen luentomonisteen sinne taululle nii se tuntu aika turhalta*. Luennoilla saatetaan käsitellä kerralla liian isoja kokonaisuuksia opiskelijoiden mielestä.

Pettyneet-ryhmän pääaineopiskelijat löysivät luennoista ongelmakohtia ja heillä oli hankaluuksia sopeutua. OP3 koki luennoilla muistiinpanojen kirjoittamisen turhauttavaksi: *Maikat on sillai et pitää tehdä näitä muistiinpanoja, että ette te muuten pysy kärryillä, että no mä en ainakaa pysy kärryillä jos mä yritän kirjoittaa ja kuunnella samaan aikaan*. Hän uskoo, että opiskelija, joka pystyy kirjaamaan muistiinpanoja, ymmärtää myös mitä käsitellään ja näin *muistiinpanojen kirjaaminen varmasti korreloi osaamisen kanssa*. OP3 ihmettelee myös, miksi materiaalit eivät voi olla suoraan saatavilla käytössä olevista verkkoympäristöistä. OP8 taas nostaa esiin etenkin peruskurssien luentojen suurten osallistujamäärän: *Tulee vaa semmonen vähä niinku kuollu hiljasuus siellä luokassa, että kukaa ei vastaa tai kommentoi mitään, kun luennoilla on niin hirveesti ihmisiä ja se on semmonen suuri massa*.

### 5.3.2 Harjoituksista

Tyytyväiset pitävät harjoitusryhmien toimintaa onnistuneena. *No tää mite harkat käydää läpi on mun mielestä hyvä. Ja sit monilla noilla harkkaohjaajilla on tosi hyvä ote siihen, et vaiks ei välttämät tarvis kaikkii välivaiheita käydä läpi nii ne käydää silti, tavallaa varmuuden vuoks, et jos joku on sillee ei kehtaa kysyy ja sit se ei tajuu yhtää mitää, nii se on mun mielestä ollu tosi hyvä.*, kertoo OP1 matematiikan harjoitusryhmäkokemuksistaan. Pienemmissä harjoitusryhmissä saa palautetta itse



tehtyihin tehtäviin ja niissä myös keskustellaan enemmän.

Pettyneet tuovat esiin harjoitusryhmien ongelmakohtia. OP3 kokee harjoitusryhmätoiminnan tehottomaksi: *Jos mä oon osannu tehdä ne tehtävät nii siihän mä istun kaks tuntii sielä...ja sit taas jos ei oo osannu nii voi olla et siel mennää vähä liianki nopeesti, eikä ehkä uskalla sit keskeyttää tai kysyä, kaikki muut tuntuu et on tajunnu jonkun jutun.* OP3 toteaa, että harjoitusten tekeminen kynällä ja paperilla on ehdottoman tärkeää oppimisen kannalta, mutta jää pohtimaan, voisiko toimintaa tehostaa. OP5 nostaa esiin sen, että harjoituksissa käsitellään aina vain yhden opiskelijan tuotos: *jos sä oot ratkassu sen tehtävän vaikka eri tavalla, mut sä oot saanu saman vastauksen tai sit sä oot ratkassu sen ihan eritavalla ja saanu väärän vastauksen nii sit sä et niinku, ainakaa mä en osaa itse siitä katsoa välttämättä mikä tässä on väärin ja se jää vähän sillee noo mä katton sitte.* OP7 vertailee materiaaleissa annettuja esimerkkejä ja harjoitustehtäviä: *Esimerkit Moodlessa on tosi lyhyistä helpoista tehtävistä ja ne viikkoharkat on tosi pitkii tehtävii, voi olla et mä oon iha vääräsäki et tavallaa se pitäis olla melkei toiste päin et pidempii esimerkkei ja lyhyempi harkois.* OP8 pohtii harjoituksissa vallitsevaa ilmapiiriä: *ei sielä mun mielestä oo mikää ikävä ilmapiiri.* Mutta OP8 kokee myös, ettei kukaa varmaa hirveesti tykkää olla sielä taululla, *nii sit sielä ihmiset aina kutistuu ku kysytää et kuka tulee näyttämään tän ja tän tehtävän.* Tärkeäksi harjoitusryhmäkokemuksen muodostajaksi hän nostaa esiin virheiden käsittelyn: *mun mielestä on hirveen tärkeetä se että miten ne virheet käsitellään, koska hirveesti tehdään virheitä kun kirjetetaan taululle, ja tehään pieleen ja lasketaan pieleen, että jos ne virheet otetaan sillätavalla, että niistä tulee ees vähän paha mieli, nii se aika paljon kertaantuu sit siinä ettei halua mennä jatkossakaan taululle.* OP8 mukaan menee ihan hirveesti aikaa noihin tehtäviin ku niitä lähtee tekemään.

Joskus harjoitukset ovat esimerkiksi Moodle-oppimisympäristössä sähköisesti. Tehtävät voivat olla monivalintaa tai vastauksen kirjoittamista tekstikenttään. Moodletehtävistä pidetään paljon. OP7 kertoo: *kynnys alottaa on paljo pienempi mun mielestä just moodletehtävis.* OP3 mielestä suora palaute tehtävistä on hyväksi: *sairaan hyvä mun mielestä se Moodle nimenomaan oppimisen väline, et siinä niinku näkee sen oman oppimisen.* OP5 huomauttaa, että Moodletehtävistä näkee heti osasiko vastata oikein ja jos ei, ajattelu jatkui: *alko miettii mikä tässä on väärin, minkä takia tää on väärin.* Monipuolisuus virkistää OP3 mukaan: *Puolet Moodletehtävii ja sit puolet oli niit laskuharkka, tavallisii tehtävii, nii seki oli ihan tosi toimiva. Muutenki niinku erilaisia keinoja, ihmiset oppii erilailla.* Toki eriäviä mielipiteitäkin löytyy, OP4 kokee Moodleharjoitukset aikaavievinä ja heikkoina oppimisen kannalta.

### 5.3.3 Kysymisestä

Tietämättömyytensä osoittaminen kysymisellä koetaan erittäin vaikeaksi yliopistomatematiikan luennoilla ja harjoituksissa. Kysyminen nousi vahvaksi teemaksi haastatteluissa. *Harkkaryhmässä tai muualla ku esittää jonku asian ja kysyy siitä kysymyksen ja sit jos sielt ei kuulu vastausta nii [harjoitusten pitäjä/luennoitsija] sanoo et "no tää on helppo asia" nii tulee kauhee paine siitä että nyt jos vastaa siihen nii pitäis mennä oikeesti oikein miettii OP8 ja jatkaa: eikai kukaan kysy jos tietäis jo.*

Kukaan haastatelluista opiskelijoista ei koe voivansa kysyä luennon aikana kysymystä. Sivuaaineopiskelija OP5 mainitsee, että *ehkä me saatetaan kysyä jos me ollaan jotenki porukkana mietitty*, mutta toteaa myös että *matikan luennolla on ihan täys hiljasuus jotenki, et mä oon kokenu, että mulle tulee semmonen olo, että nää kaikki tietää mitä ne tekee ja tekee muistiinpanoja*. Luennoitsijan asenne vaikuttaa todella paljon luennolla esitettävien kysymysten määrään, osa opiskelijoista kokee että *ne suhtautuu todella negatiivisesti siihen jos joku kysyy ylipäänsä yhtään mitään*, toteaa OP3, joka kokee kehtaavansa kysyä *helpommin kuin moni muu*. Haastatteluissa kävi ilmi, että kysymyksiä kuitenkin esitetään toisinaan, määrä vaihtelee luennoitsijasta riippuen.

Kysyminen koetaan joskus vaivaksi, eikä viitti venyttää *ku kaikki halua aikasemmin pois* (OP1) harjoitusryhmistä. *Mä oon koittanu mennä pienempiin, niihin vähän vähemmän suosittuihin harkkaryhmiin niin niissä saa enemmän yksilöllistä opetusta tai sillee et on enemmän aikaa kysellä*, kertoo OP6. Myös OP8 kuvailee pienemmissä harjoitusryhmissä olevan enemmän vuorovaikutusta ryhmän kesken. Myös luennoilla on huomattu kiirettä: *ne haluaa mennä ensinnäki eteenpäin ja se häiritsee jos on minuuttitukka aikataulu*, toteaa OP3.

Harjoituksissa ja matematiikkapajassa kannustetaan paljon kysymään ja siellä tuntuu olevan enemmän aikaa vastata. OP4 kokee voivansa kysyä: *harkoissa kyselen ku ne tekee ne taululle, että "mistä toi tuli ja mistä toi tuli" ja ihan hyvin sielä selitetään että sitte tajuaa*, mutta toteaa myös, että *ehkä jos harkoissa on vähemmän porukkaa nii sitte uskaltaa kysyä tyhmiinkin kysymyksiä*. Matematiikkapajassa on aikaa vastata: *vaik se on selittänyt sen kolme kertaa ettet ihan vieläkään ymmärrä nii kyl hän niinku vieläki yrittää, mut luennoil et jos sä et niinku ekal kerral ymmärrä nii sit se vaa jää*, kertoo OP1.

### 5.3.4 Materiaaleista

Opiskelijat kokevat hyvän luentomateriaalin tai monisteen tukevan oppimista. OP3 mielestä: *ihanaa että ku monilla kursseilla on se luentomoniste tai jotain et tavallaan sä pystyt sen itseopiskeleen sen kurssin sieltä verkosta, nii se olis hirveen tärkeää*. Materiaaliin palataan harjoitustehtäviä tehdessä ja se toimii ensisijaisena tiedon lähteenä. *Jos sä oot luennol ja vaikka olisitki kuunnellu, mut et oo tajunnu jotai asiaa ja sit sä palaat siihen monisteeseen, nii jos siel on hypätty viistoista välivaihetta ja sä et enää tajuu mistää mitää, nii se on mun mielestä aika sillai huono, et siihen on mun mielest hyvä panostaa. Ja tosi monet muutki kaverit just kattoo luentomonisteesta jälkeenpäin ku ei oo hiffannu.*, kertoo OP1. Internetistä hakeminen on aina toissijaista, eivätkä opiskelijat luota verkosta löytyvään tietoon. *Jos googlaa sitä asiaa ja saattaa eksyä wikipediaan lukemaan niistä asioista, koska sielä on ainaki esitetty se selkeesti, mikä ei ehkä oo ihan tarkoituksenmukanen keino opiskella*, toteaa OP8. Myös OP7 kokee hyvän luentomateriaalin tärkeäksi, sillä hän *ei oo päässy matikkagooglettamisen makuun*.

Luentotallenteiden hyödyntäminen nousi yhdessä haastattelussa keskustelun aiheeksi. OP3 ihmetteli, miksei luentoja tallenneta opiskelijoiden myöhempää käyttöä varten, esimerkiksi sairastapauksissa opiskelija voisi jäädä kotiin lepäämään. Hänen

mielestään perustelu *kun matikan opettaminen on niin erilaista kuin muiden tieteid-*  
*den, että kun sielä kysytään ja sielä tulee tällast niinku keskusteluu* on huono, koska  
*kukaa uskalla kysyy siel mitää*. Luentotallenteen pysäyttäminen mahdollistaisi tiedon  
etsinnän, kun kohdalle osuu asia johon ei ole tarpeeksi esitietoja.

### 5.3.5 Yliopistomatematiikasta

Opiskelijoilla oli erilaisia odotuksia yliopistomatematiikasta. *Aattelin vaan että se on varmaa jatkaa lukiolle ja totesin ettei se ihan oo sitä*, tiivistää OP4. Yliopistomatematiikan opiskelu yllätti Tyytyväiset työmäärällään. He kokivat opiskelun olevan odotettua rennompaa ja lukujärjestykset kevyempiä. OP1 kertoo: *työmäärä oli erilainen just et no matikas ei tarvii lukee mitää kirjoja*. Opiskelijat kokevat luennoilla käymisen tärkeänä asian ymmärtämisen suhteen. Yliopistomatematiikan opiskelun vaikeustaso vaihtelee: *riippuen kurssista se on joko niinku että tuntuu että on ihan päivänselvät asiat, että tottakai tää menee tälläi näin ja sitte on niinku toinen ääripää pohtii OP2*.

Pettyneet kokevat matematiikan yliopistossa todella haastavaksi ja aikaavieväksi. *Matikka oli tosi haastavaa, teoreettisempaa, etku ekat kurssit nii joutu opettelee sen tavan ajatella*, muistelee OP7 ja jatkaa yllättyneenä: *ehkä enemmän joutu opettelee ulkoo kaavoja*, verrattuna odotuksiin. Vaikka OP5 kokee yliopistomatematiikan aikaavieväksi, hän pitää opintojen tasaisesta jakaantumisesta joka viikolle. OP3 yllättyi matematiikan *vanhoillisuudesta*, hän esimerkiksi odotti verkkoluentoja. Myös OP8 kertoo: *siis se on paljon haastavampaa kuin mitä mullon ollu aiemmin koska mulle on matikka ollu aina suht helppoo, et se lukiossa muuttu vähän vaikeemmaks, mut sit tääl se on jotenki niinku vielä vaikeempaa ku opiskellaa viel vähä eritavalla ku aiemmin mihin on tottunu*.

Yliopistomatematiikka vaatii *vähän enemmän ajattelua kuin joku lukio*, naurah-  
taa OP2. Abstraktilla tasolla ajattelu koetaan haastavaksi: *analyysi ja joku raja-arvon määritelmät ja nää kaikki muu tuntuu sitte haasteelliselta välillä, ku täytyy tosi abstraktilla tasolla ymmärtää asioita*, pohtii OP1. Opiskelijoilla on vaikeuksia ymmärtää opiskeltavien asioiden hyödyllisyyttä tulevaisuuden kannalta, asiat koetaan irrallisina: *joku yhteys täl pitäis olla niinku työelämään vaikka ollaanki yliopistossa*, miettii OP3. Myös OP5 toteaa: *asia on kaukana ja mä en oikein koe että mä käytän näitä tietoja hirveesti myöhemmin nii sen takia se jää jotenki tosi irralliseksi, että mitä mä täälä niinku opiskelen*. OP3 yllättyi: *aika paljon se on kuitenkin laskemista*, kun taas OP4 mielestä yliopistossa on *paljon vähemmän laskemista*. Monet yliopistomatematiikassa käytettävät käsitteet ovat opiskelijoille tuttuja ja *tunkeudutaan [syvällisemmin] niihi asioihin mitä on kuullu aikasemmin*, kertoo OP1.

## 5.4 Opiskelijoiden matematiikkakuva

Tässä alaluvussa käsitellään haastatteluiden ja kyselyiden perusteella esiin nousseita matematiikkakuvan piirteitä Tyytyväisissä ja Pettyneissä. Luvussa tarkastellaan opiskelijoiden minäpystyvyys-uskoa (I komponentti), uskomuksia matematiikan op-

pimisesta ja opettamisesta (II komponentti) sekä sosiaalisesta kontekstista (III komponentti).

Tyytyväisten minäpystyvyys-usko on haastattelujen perusteella korkeampi kuin Pettyneiden. He myöntävät, että välillä tulee tilanteita, jolloin ei ymmärrä yhtään mitään, mutta uskovat silti selviytyvänsä matematiikan kursseista. He ovat motivoituneita tekemään töitä ja uskovat harjoittelun tuottavan tulosta. Tyytyväiset ovat kiinnostuneita matematiikasta yleisesti ja he kokevat saavansa matematiikan opiskelusta enemmän kuin pelkkiä opintopisteitä.

Tyytyväiset pitävät itseopiskelua tehokkaana, kun käytössä on hyvä luentomoniste. Tyytyväisistä OP1 kokee oppivansa vain itse työstämällä eikä kuuntelemalla, muut pitävät myös opettajan selittämistä tärkeänä. OP4 nostaa esiin muuttuneen käsityksensä matematiikan oppimisesta: *mä sillon [lukiossa] aattelin, että matikkaa oppii vain laskemalla ja ne [tunnit] oli ihan turhaa mutta täällä näin sitte luennot onkin tärkeitä*. Tyytyväiset pitävät tehtävien tekoa keskeisenä prosessina yliopistomatematiikan oppimisessa. He uskovat havainnollistavien esimerkkien auttavan oppimisessa. Harjoitusryhmien toiminta koetaan Tyytyväisten mielestä toimivaksi, kun näkee ja kuulee toisten ratkaisuja tai saa palautetta omiin päättelyketjuihin.

Tyytyväiset tekevät harjoitustehtäviä ensisijaisesti itsenäisesti, mutta turvautuvat mielellään kurssikavereiden apuun jos ongelmia ilmenee. Keskustelumahdollisuus ja itselle vaikeisiin tehtäviin avun saanti kavereilta koetaan tärkeänä.

Pettyneet ovat epävarmoja itsestään ja heidän minäpystyvyys-uskonsa on heikkoa. He kokevat yliopistomatematiikan opiskelun haastavana. Etenkin OP3 tiedostaa heikot esitietonsa lyhyen matematiikan lukijana ja uskoo menestyvänsä tilastotieteessä paremmin.

Pettyjät tiedostavat, että töitä tekemällä he oppivat, mutta kokevat, etteivät pysty käyttämään matematiikan opiskeluun niin paljon aikaa kuin haluaisivat. OP7 kokee joutuneensa opettelemaan uuden tavan ajatella ja OP8 kokee uuden opiskelutyylin hankalana. Pettyjät uskovat tarvitsevänsä erilaisia oppimistapoja ja monipuolisia materiaaleja. Luennoitsijan selittämistä ja asennetta pidetään tärkeinä opetustilanteessa. Lisäksi opiskelijoiden aktivointia luennoilla toivotaan, muutenhan luennot voisivat hyvin olla verkossa. Matematiikan opetuksen vanhoillisuutta kummastellaan. Pettyjät tuovat esiin motivaation puutteen esimerkiksi todistamisen opettelussa, sillä he eivät koe hyötyvänsä sen opiskelusta tulevaisuutta ajatellen. Tehtävien teko onnistuu Pettyneiden mielestä paremmin kaveriporukassa kuin yksin, vaikka silloin saattaa keskustelu mennä myös ohi aiheen. Ryhmässä tai parin kanssa tekemällä voi auttaa toista.

Tyytyväisissä ja Pettyneissä on havaittavissa ryhmien sisällä samanlaisia matematiikkakuvan piirteitä. Tyytyväisiltä löytyy itseluottamusta yliopistomatematiikan opiskeluun, pettyneet ovat epävarmoja omasta osaamisestaan (I komponentti). Tyytyväiset kokevat oppivansa nykyisillä opetusmenetelmillä ja käytännöillä, pettyneet kaipaavat monipuolisempia vaihtoehtoja (II komponentti). Kaikki haastateltavat jakavat käsityksen tehtävien teon merkityksestä matematiikan oppimisen kannalta. Myös luennoitsijan selittämistä pidetään tärkeänä molemmissa ryhmissä. Luvusta 5.3.3 käy ilmi, että kaikki haastateltavat kokevat kysymisen vaikeana. Luennoilla vallitseva ilmapiiri koetaan sellaisena, että kysymyksille ei joko ole aikaa tai pelätään

tyhmien kysymysten esittämistä ja niistä aiheutuvaa häpeän tunnetta. Luennoilla valitsee opettaja johtoisuus mutta harjoitusryhmissä on enemmän aikaa keskustelulle. (III komponentti)

## 5.5 Käsitys matemaattisesta todistamisesta

Luvussa 5.1 käsiteltiin kyselyvastaukset opiskelijoiden käsityksestä ”mitä matemaattinen todistaminen on” yliopistomatematiikan opiskelun alussa ja ensimmäisten matematiikan kurssien loppupuolella. Tässä luvussa tarkastellaan haastateltavien käsityksiä tarkemmin.

OP1 muistelee, että hänen lukiossaan käsiteltiin *koko lukion matikan aikana varmaa jotai kolme todistusta*. Lyhyen matematiikan lukijana OP3 kertoo: *en ollu ikinä elämässäni tehny yhtäkään matemaattista todistusta aiemmin, enkä ees lukuun sellasta läpi*. OP5 mukaan heidän lukiossaan ei todistettu lainkaan, OP7 muistelee sivuuttaneensa kaikki: *ne ei ollu pakollisii etten tainnu muistaakseni tehdä ikinä, kokeessaki pysty aina skippaan*. OP8 muistelee erästä lukion opettajaansa, joka piti todistamisesta: *jonkin verran käytiin sen kans ihan esimerkkejä tunnilla, ku oli joku uus asia, vähempi oli niinku tehtävinä mitää et pitäis itte todistaa*.

Ennakkokyselyssä (Liite 1) Tyytyväisistä kolme neljästä kuvailivat matemaattista todistamista lyhyesti ja käyttivät verbiä todistaa: *todistetaan väite oikeaksi, todistetaan, että jokin asia on faktaa tai fiktiota, tai käytetään matemaattisia ja loogisia keinoja todistamaan (yleensä) matemaattinen väite*. OP6 kuvailee laajemmin: *kaavojen johtamista tai niiden tai muiden matemaattisten argumenttien pätevyyden osoittamista tietyillä ehdoilla tai ehdoilla*. Pettyneistä vain OP7 käyttää todistaa verbiä: *Matemaattisessa todistamisessa todistetaan jonkin oikeellisuus laskennallisin menetelmin..* OP5 ja OP8 kuvailevat kaavojen alkuperää: *ikään kuin kaavojen syntymisen seuraamista: mistä tietty kaava on keksitty, millä tavalla se voidaan keksiä uudelleen. Näin seurataan reittiä josta matemaattinen kaava on alun perin keksitty ja kuinka se voidaan vedenpitävästi löytää samaa reittiä pitkin aina uudelleen ja uudelleen*. OP5 lisää myös todistamisen merkityksestä: *Todistaminen saattaa tuntua monesta turhalta, mutta todistaminen vaatii matemaattista päättelykykyä ja kehittää ajattelun taitoja*. OP3 kuvailee matemaattista todistamista jonkinlaisena loogisena päättelynä, jossa tietyistä lähtökohdista rakennetaan toimivia malleja, joilla kuvataan maailmaa.

Loppukyselyssä (Liite 3) kuvaukset matemaattisesta todistamisesta olivat lyhyempiä ja vain OP7 käytti verbiä todistaa. Hänen kuvauksensa oli pysynyt lähes sanasta sanaan samanlaisena, kuin alkusyksyn ennakkokyselyssä. OP5, OP6 ja OP8 kuvailivat todistamista yleistämiseksi: *yksityisen yleistämistä aukottomasti, pätevästi ja ymmärrettävästi tai yleistäminen yksittäisistä tapauksista kaikkiin tapauksiin aukottomasti*. Myös OP1 mainitsee kaikki tapaukset: *Selitetään, miksi joku väite pitää tai ei pidä paikkaansa tutkimalla kaikki mahdolliset tapaukset*. OP3 kuvailee: *oletuksiin pohjautuen todennetaan jokin väite todeksi tai epätodeksi, kun taas OP4: Jonkin selvän asian tekemistä monimutkaiseksi vaikealla todistuksella*.

Sekä tyytyväisistä että pettyneistä löytyy opiskelijoita, jotka nostavat haastatte- luissa esiin todistamisen merkityksen ymmärtämisen kannalta. OP2 mielestä: *kun*

*todistaa sen nii sehä tarkoittaa että ymmärtää sitä asiaa ja OP7: sä ymmärrät ehkä sen asian paremmin jos sä oot todistanu sen. Lisäksi OP1 ja OP5 mainitsevat, että todistaminen tukee ajattelun kehittymistä.*

Silti todistaminen koetaan vaikeana asiana, Tyytyväiset kertovat: *todistaminen on niinku kaikkein vaikeinta, vaikeinta opetella ja hahmottaa, kertoo OP6. Aluksi OP1 koki, että ei osannu käyttää niitä työkaluja välttämät nii se tuntu tosi vaikeelta, mutta ajanmyötä todistaminen on helpottanut. Myös OP4 kokee välillä hämmennystä: ei välttämättä aina ymmärrä miks joku tekee näin, syksyllä mä sanoisin että melkee kaiken mä ymmärsin miks joku todistettii tällä tavalla, ja nyt sitte tää analyysi on semmonen, että miks toi todistetaa tolla lailla tai mistä toi juttu tulee. Tyytyväiset ovat kuitenkin toiveikkaita, OP4 jatkaa: jos en heti tajuu nii kokeilen parii eri tapaa todistaa nii kyl niistä sit joku toimii. OP6 on muistelee: luennolla se sano että siihen menee vielä monen monta vuotta ennenku se rupee sujumaan helposti, nii sitä odotellessa, et sitä niinku jotenki aattelee että nyt pitäis osata kaikki hyvin, ja sitku ei osaa nii ei tuu mitää, mut ehkä se niinku vaa vaatii sitä joka kurssilla työtä, et joka kurseilla erilaisia tekniikoita eri asioiden parissa, et kyllä se siitä sitte joskus, parin vuoden päästä rupee luonnistuu.*

Pettyneistä vain OP3 kuulostaa luottavaiselta: *loppujenlopuks on vaan muutama aika yksinkertanen taktiikka, mitä sitten sovelletaan. Vaikeinta on oikean menetelmän löytäminen: pitää vaa niinku nähä siitä tehtävästä tai väitteestä että miten tätä nyt sit lähettää käsittele hän jatkaa. Miten tehtävästä sitten näkee mitä todistustekniikkaa tulee käyttää, onkin hankala selvittää, eikä OP3 osaa vastata jatkokysymykseen.*

Todistamistekniikoiden hallinnasta koetaan olevan etenkin jatkokurssien ja tutkimuksen teon kannalta hyötyä, OP3 miettii: *täällä on tarkoitus tehdä myös sitä tutkimusta ja eihän sitä tutkimusta voi tehdä jos ei oo mitään välineitä sen tekemiseen. Opiskelijat eivät näe todistamisosaamisen tuovan suoraa hyötyä työelämään. Tyytyväiset kokevat osaamisen kuitenkin yleishyödyllisenä: ei siitä ny käytännön hyötyä oo ollu, mutta mä kyllä koen sen hyödylliseksi yleisesti, kertoo OP6. He tunnistavat ennakkoluulot: *varmaa monet kattoo matikan opiskelua ja sanois et toi on vähä turhaa, miks pitää todistaa, pohtii OP4.**

Pettyneistä etenkin OP5 ja OP8 kyseenalaistavat todistamisen tarpeellisuuden: *mulla on välillä semmonen olo että miks mä oon keksimässä pyörää uudestaan että kun jotkut asiat on todistettu joskus kauan kauan aikaa sitten pohtii OP5, mutta jatkaa samaan lauseeseen toisaalta kyllähän se auttaa ymmärtään niitä ilmiöitä tai kaavoja. OP8 ei näe todistamista merkitykselliseksi itselleen: *siit hävii se merkitys että mä en nää mitää hajuu et miks mä teen tämmöstä ja sitku siin, ylipäätää opiskelus, hävii se että miks tekee jotakin nii sit siin menee motivaatio kans aika helposti. Myös OP7 kokee, ettei todistamisesta ole hänelle konkreettista hyötyä.**

## **5.6 Kielentämisen vaikutus**

Luvussa 5.1 käsiteltiin kyselyihin vastanneiden mielipiteet kielentämisen vaikutuksesta oppimiseen, etenkin matemaattisen todistamisen kannalta. Tässä luvussa paneudutaan haastateltavien ajatuksiin.

Suurin osa haastateltavista on sitä mieltä, että matematiikan kielentäminen edisti oppimista ja sitä kannattaa jatkaa. Opiskelijat kokivat kielentämisen auttaneen tehtävän hahmottamisessa ja ymmärtämisessä. He suosittelivat kielentämistä etenkin ensimmäisille kursseille tai uuden asian käsittelyyn, mikä auttaisi käsitteiden mieleenpainamisessa ja perusteiden ymmärtämisessä. Kielentämistehtävä koettiin helpommin lähestyttäväksi kuin perinteinen todistustehtävä: *tämmöseen on kynnys lähtee yrittään paljon pienempi*, toteaa OP7. Matematiikan kielentäminen pakottaa opiskelijat pohtimaan tehtäviä syvällisemmin: *siinä pitää ehkä enemmän miettiä ja sen takia sen tehtävän tekemiseen saattaa mennä enemmän aikaa, mutta sen jälkeen ehkä koen että on parempi ymmärrys*, miettii OP5.

Osaavalle opiskelijalle kielentäminen tuntui turhautavalta, sillä matemaattisten merkintöjen kirjoittaminen luonnollisella kielellä vei aikaa ja yksikäsitteinen ilmaisu oli haastavampaa. *Se oli merkeillä selvää mutta luonnollisella kielellä et sais niin absoluuttisen yksikäsitteistä, tuntu et joutu selittää sitä enemmän*, muistelee OP6. Silti opiskelijat uskoivat monipuolisten tehtävien auttavan erilaisia oppijoita. Harjoitusryhmissä, joissa ratkaisun tekijä kertoo tehtävästä sanallisesti, on kielentämistä opiskelijoiden mukaan hyödynnetty jo ennen menetelmän nimeämistä.

## 5.7 Kehittäminen

Opiskelijoilta nousi haastatteluissa monia kehitysideoita yliopistomatematiikan opetukseen, käytäntöihin ja tapoihin. Luentomonisteisiin toivottiin lisää havainnollistavia esimerkkejä, sillä se toimii pääasiallisena opiskelun välineenä. Luennoille kaivattiin lisäesimerkkejä luentomonisteeseen nähden ja pitkiä esimerkkejä verrattuna harjoitustehtäviin. Kaikenlaisen lisämateriaalin tarjoaminen koettiin tervetulleeksi, osa suosi kirjoja, osa verkkolähteitä. Luennoille kaivattiin myös opiskelijoita aktivoivia tehtäviä, joita saisi hetken pohtia parin kanssa. Keskustelutehtävä toisi luento- vaihtelevuutta, auttaisi keskittymään ja rohkaisisi etenkin ensimmäisten vuosikurssien opiskelijoita tutustumaan toisiinsa. Luentojen taukokäytännöt aiheuttivat hämmennystä, jokaisella luennoitsijalla tuntuu olevan omansa.

Luentotalenteiden avulla opiskelijat voisivat palata luennoilla käsiteltäviin asioihin ja kuunnella opettajan selitystä uudelleen. Sairastapauksissa tai muiden päällekkäisten kurssien takia yksittäisiä luentoja voisi katsoa jälkikäteen.

Pienemmät harjoitusryhmät koetaan sosiaalisemmiksi: *sielä sai jotenki niin intensiivistä semmosta että josset sä ymmärtäny jotai nii sitte sillä oli aikaa sille selitykselle*, muistelee OP5. Eräs opiskelija nostaa esiin turhautumistaan harjoitusryhmätyöskentelyyn. Hän kokee tehtävien kirjoittamisen taululle ajanhukkana ja ehdottaa esimerkiksi dokumenttikameran käyttöä tehtävien näyttämiseen, mikä säästäisi kaikkien aikaa. Edelleen tekijä selittäisi vastauksensa, mutta keskustelulle ja vaihtoehtoisille ratkaisuille vapautuisi aikaa.

Yksi opiskelija nostaa esiin luennoitsijoiden puolustelevan asenteen työtään kohti. Kritiikkiä tuntuu olevan hankala ottaa vastaan. Asenne vaikuttaa kuitenkin paljon opetukseen. Lauseen ”tämä on helppo asia” käyttäminen särähtää opiskelijoiden korvaan ja aiheuttaa paineita, etenkin jos opiskelija on juuri pyytänyt selvennystä

käsiteltävään asiaan. Luvussa 5.3.3 todettiin, että luennoilla on vaikea kysyä. Eräs haastateltava ehdottaa Padlet-verkkosivun käyttöä kysymysten esittämisen helpottamiseksi.

Vaikka opiskelijoilta nousi ideoita opetuksen kehittämiseen, monista käytännöistä pidettiin, kuten luentojen ja harjoitusryhmien rytmistä. *Kyllähän tää nykynekin systeemi kai aikahyvin toimii*, pohtii OP3. Viikkoharjoitukset koetaan sopivan velvoittavilta. OP4 toteaa tyytyväisenä: *lukion opetusmetodi sopii sinne ja mitä täällä on nii sopii tänne*.



## 6 Johtopäätökset

Tässä luvussa vastataan tutkimuskysymyksiin ja tehdään johtopäätöksiä tutkimuksen tuloksista. Johtopäätöksissä on otettu huomioon koko aineisto eli kyselyt, kielentämistehtävät ja haastattelut. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia kokemuksia ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevat, lukiotaustaiset opiskelijat, saivat yliopistomatematiikan opiskelusta.

Ensimmäinen tutkimuskysymys käsitteli opiskelijoiden kokemuksia yliopistomatematiikan opiskelusta lukioon verrattuna. Opiskelijat kokevat yliopistomatematiikan opiskelun työlääksi, haastavaksi ja abstraktiksi. Haastavuus tarkoittaa osalle opiskelijoista positiivista itsensä haastamista, mutta osa kokee vaikeudet ylitsepääsemättömiksi. Metaforat lauseen ”Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin..” jatkoksi kuvaavat opiskelijoiden monipuolisia tunteita: *laittaisi rahaa pankkiin, kasaisi legopalikoita* tai *vääntäisi veistä haavassa*. Lukio- ja yliopistomatematiikan eroista korostuivat yliopisto-opiskelun itsenäinen työskentely, mutta myös vapaus. Harjoitustehtävien tekemiseen on enemmän aikaa, mutta asioissa edetään nopealla tahdilla. Aiheet painottuvat loogiseen päättelyyn ja todistamiseen, harvemmin lasketaan. Opiskelijat kokevat helpot asiat *suoraviivaisiksi* tai *mekaanisiksi*, johon he ovat tottuneet lukiomatematiikan opiskelussa. Yliopistomatematiikan abstraktius tuottaa vaikeuksia.

Opiskelijat jakautuvat asenteensa ja minäpystyvyys-uskonsa perusteella kahteen ryhmään, joiden kokemukset eroavat toisistaan. Positiivisesti yliopistomatematiikan opiskeluun suhtautuvat ovat luottavaisia omaan osaamiseensa ja he kokevat opiskelun hyödyllisenä. Heitä kiinnostaa matematiikan opiskelu sen yleishyödyllisyyden takia. Negatiivisia tunteita yliopistomatematiikan opiskelusta nousee pintaan opiskelijoille, jotka ovat epävarmoja omasta oppimisestaan. He ovat pettyneitä opiskeltaviin asioihin, jotka eivät vastanneet heidän odotuksiaan, eivätkä näe yhtymäkohtia työelämän kannalta. Positiivisesti asennoituneet ovat sopeutuneet yliopistoon paremmin, luennoista ja harjoituksista koostuva arki tuntuu luontevalta ja he kokevat oppivansa ja pystyvänsä suoriutumaan vaadittavista tehtävistä. He myöntävät kokevansa opiskelun jopa vaikeaksi, mutta ovat luottavaisia osaamisen rakentumisesta ajan mittaan. Negatiivisia tunteita enemmän kokevilla on vaikeuksia suoriutua opinnoista, he kaipaivat erilaista, modernimpaa opetustyyliä tai ainakin enemmän materiaaleja ja esimerkkejä. Opiskelijoilta nousee myös huoli epäonnistumisen mahdollisuudesta esimerkiksi harjoitusryhmissä, ja siitä kuinka virheet käsitellään.

Luennot nousivat yliopistomatematiikan opiskelussa tärkeään asemaan opiskelijoille, sillä opettajan selitys avaa käsiteltäviä asioita. Opiskelijat ovat saaneet erilaisia kokemuksia luentojen hyödyllisyydestä, luennoitsijasta riippuen. Luennoille tullaan kuuntelemaan opettajan selittämistä ja saamaan havainnollistavia lisäesimerkkejä materiaaliin nähden, ja mikäli opiskelijat eivät koe saavansa mitään lisää, eivät he ole motivoituneita saapumaan paikalle. Muistiinpanojen kirjoittaminen ja vanhoilliset menetelmät aiheuttivat ihmettelyä.

Harjoitusryhmätoimintaa pidetään toimivana positiivisesti asennoituneiden kes-

kuudessa. He hakevat ryhmistä palautetta omille tehtävilleen ja kokevat oppivansa myös muiden ratkaisuksista, etenkin pienemmissä, keskustelemissa ryhmissä. Pettyneet kokevat tehtävien tarkistamisen tehottomaksi ja nostavat esiin oman ratkaisun esittämisen pelon. Erilaisten tehtävien koetaan tuovan mukavaa vaihtelua ja esimerkiksi Moodle-tehtävistä pidetään niiden antaman suoran palautteen takia.

Haastatellut opiskelijat eivät uskalla kysyä luennoilla kysymyksiä. Pahinta on, mikäli luennoitsija tokaisee asian olevan helppo ja pyytää kuulijoita vastaamaan esille nousseeseen kysymykseen. Luennoitsijan asenteen koetaan olevan ratkaiseva tekijä kysymysten määrään luennon aikana. Harjoitusryhmissä ja Matematiikkapajassa koetaan kysymyksille olevan enemmän aikaa.

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen liittyy alakysymys millaisena opiskelijoiden matematiikkakuva näyttäytyy kokemuksissa. Haastatelluista opiskelijoista muodostetut ryhmät erottuivat toisistaan selvästi matematiikkakuvan ensimmäisen komponentin, uskomuksiin itsestä matematiikan oppijana, osalta. Toisen komponentin, uskomuksiin matematiikan oppimisesta ja opettamisesta, ryhmistä löytyy enemmän eroja mutta myös joitain yhtäläisyyksiä. Kolmannen komponentin osalta, uskomuksista sosiaalisesta kontekstista, ryhmistä löytyi samanlaisia ajatuksia. Tyytyväisistä välittyi haastattelujen perusteella vahvaa minäpystyvyyttä-uskoa eli luottamusta omaan kykyyn suoriutua yliopistomatematiikan opinnoista. He uskovat nykyisten opetusmenetelmien toimivuuteen ja kokevat oppivansa kunhan tekevät töitä. Pettyneet ovat epävarmoja omasta osaamisestaan ja kaipaavat erilaisia opetusmenetelmiä ja materiaaleja. Kaikki haastateltavat kokevat tehtävien teon erittäin merkityksellisenä matematiikan oppimisen kannalta. Sosiaaliseen kontekstiin liittyy myös kokemukset kysymysten esittämisen vaikeudesta. Luennoilla opettajajohtoisuus koetaan niin vallitsevana, ettei aikaa kysymyksille aina löydy.

Toinen tutkimuskysymys käsitteli opiskelijoiden käsitystä matemaattisesta todistamisesta. Kyselyiden perusteella kurssin alussa opiskelijoilla oli hyvin erilaisia sanavalintoja kuvaamaan matemaattista todistamista, mutta kurssin loppupuolella variaatioita oli vähemmän ja ilmaistut *keksitään tapa sanoa asia toisin* olivat jääneet pois. Loppukyselyssä toistuivat verbit *päättelyä, perustelemista, osoittamista*. Loppukyselyyn vastanneiden opiskelijoiden kuvauksista löytyi vähemmän variaatioita kuin ennakkokyselyyn vastanneiden. Haastatelluista opiskelijoista monet kokivat omat esitietonsa todistamisesta heikoiksi. Joko todistamista ei oltu käsitelty lukiossa riittävästi, tai niiden merkitystä ei koettu tärkeäksi ja opiskelija pystyi sivuuttamaan todistustehtävät. Todistamistyylit induktio- ja vastaesimerkkitodistusta lukuunottamatta koetaan vaikeiksi. Ongelmanratkaisu todistamistehtävissä on haastavaa, sillä vaikeimmaksi esiin nousee *sen keksiminen mitä pitää tehdä*. Positiivisesti asennoituneet ovat kuitenkin luottavaisia, että todistamaan oppii ajan kanssa ja kokeilemalla eri tekniikoita.

Kolmas tutkimuskysymys käsitteli kielentämistehtävien vaikutusta todistamisen idean ymmärtämiseen. Loppukyselyssä suurin osa opiskelijoista, jotka olivat tehneet kielentämistehtävät, olivat sitä mieltä, että tehtävät avasivat käsiteltävää asiaa ja käsitteet jäivät hyvin mieleen. Vain kolmen opiskelijan mielestä tehtävät eivät edistäneet oppimista. Tehtävät palauttaneista opiskelijoista suurin osa oli nähnyt paljon vaivaa ja vastannut tehtäviin perusteellisesti. Haastateltavista lähes kaikki kokivat kielentämi-

sen edistäneen oppimista ja he kannattavat tehtävien teettämistä jatkossakin, etenkin ensimmäisillä kursseilla tai uusien käsitteiden omaksumisessa. Osaavalle opiskelijalle matemaattisten merkintöjen käyttö tuntuu luontevammalta ja aikaa säästävältä, sillä luonnollisella kielellä ilmaistuna sama asia vaatii huomattavasti enemmän selitystä. Kielentämistehtävät koettiin helpommin lähestyttäväksi ja erilaisuus aiempiin tehtäviin nähden toi mukavaa vaihtelua.

Viimeinen tutkimuskysymys käsitteli opiskelijoiden kehitysideoita yliopistomatematiikan opetukseen. Monista olemassa olevista opetuksen käytännöistä pidettiin, mutta konkreettisia kehitysehdotuksia nousi myös esiin. Ideoita on kerätty taulukkoon 6.1.

Taulukko 6.1: Opiskelijoiden kehitysehdotuksia yliopistomatematiikan opetukseen

- |  |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Lisää havainnollistavia esimerkkejä</li><li>• Ehdotuksia lisämateriaaliksi</li><li>• Aktivoiva keskustelutehtävä luennolle</li><li>• Luentotallenteet</li><li>• Harjoitusryhmätyöskentelyn tehostaminen dokumenttikameralla</li><li>• Kysymysten esittämiseen alusta, esimerkiksi Padlet</li></ul> |
|--|

Opiskelijat toivoivat lisää konkreettisia ja havainnollistavia esimerkkejä sekä luennoille että materiaaliin. Myös viittaukset luotettavaksi havaittuun lisämateriaaliin koettiin tarpeelliseksi. Aktivoivilla keskustelutehtävillä kesken luennon opiskelijat voisivat testata omaa ymmärrystään. Luentotallenteet mahdollistaisivat opettajan selityksen kuuntelemisen uudelleen ja helpottaisi sairastapauksissa opiskelijan pysymistä mukana opetuksen tahdissa. Harjoitusryhmätyöskentelyn tehostamiseksi nousi idea dokumenttikameran tai vastaavan tekniikan hyödyntämisestä tehtävien esittelyssä. Luentojen aikana kysymistä helpottamaan ehdotetaan esimerkiksi verkkosivulla toimivaa ”muistilappuseinää”, johon voi kirjoittaa anonyymisti.

## 7 Pohdintaa

Tässä luvussa pohditaan tutkimuksen onnistumista, luotettavuutta ja eettisiä ratkaisuja. Tutkimuksen tuloksia tarkastellessa tutkimus onnistui kohtalaisen hyvin. Tutkimuskysymyksiin saatiin vastattua siten, että opiskelijoiden erilaiset näkökulmat tuotiin esiin. Opiskelukokemuksiin päästiin käsiksi haastattelujen avulla ja joitain matematiikkakuvan piirteitä nousi esiin. Matemaattinen todistaminen ja kielentämisen vaikutus todistuksen ymmärtämiseen herätti keskustelua. Opiskelijoilta löytyi myös kehitysehdotuksia opetukseen. Kielentämisosuuden tulokset ovat linjassa aiempien tutkimusten kanssa, opiskelijat kokevat kielentämitehtävien edistävän oppimista (vrt Joutsenlahti ym. [40] ja Linnusmäki [41]).

Tutkimuksen luotettavuus ja tulosten uskottavuus edellyttävät, että tutkimuksessa on noudatettu hyvää tieteellistä käytäntöä. Tieteellisen käytännön noudattaminen kuuluu tutkijan vastuulle. Hyvään tieteelliseen käytäntöön kuuluu rehellisyys, yleinen huolellisuus ja tarkkuus koko tutkimusprosessin ajan. Tiedonhankinnassa ja aineiston keruussa on huolehdittava eettisistä kysymyksistä, kuten tutkittavan suostumuksesta ja tutkimuksesta odotettavissa olevan hyödyn suhteessa tutkittavalle aiheutuvaan riskeihin ja haittoihin. [52] Tämän tutkimuksen kohteena olevien opiskelijoiden yksityisyyttä on suojeltu muuttamalla opiskelijoiden nimet koodeiksi. Tapaustutkimus on arvosidonnaista eli tutkijan arvomaailma on yhteydessä näkemykseen, jonka hän nostaa tutkimuksessaan esille. Tärkeää on huomioda että näin tapahtuu. [48] Tässä tutkimuksessa tutkija on tiedostanut omat ennakko-oletuksensa, jotka ovat syntyneet tutkijan omista kokemuksista opiskellessaan Tampereen yliopistossa matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelmassa. Fenomenologisen tutkimusotteen mukaisesti, tutkija on pyrkinyt sulkeistamaan omat käsityksensä ja kokemuksensa asioista ja tuomaan tutkimuksen kohteena olevien opiskelijoiden äänen kuuluviin. Tavoitteena oli kuvata opiskelijoiden kokemuksia sellaisenaan kuin ne ilmenivät heille. Aineistolähtöisesti tutkimuksessa on nostettu opiskelijoiden haastatteluissa kertomia asioita lainauksina, tukemaan tehtyjä tulkintoja.

Tutkimuksen luotettavuutta tarkastellessa voidaan pohtia, edustivatko haastateltavat opiskelijat riittävästi koko ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevien kohderyhmää. Haastateltavat olivat vastanneet molempiin vapaaehtoisiin kyselyihin ja varanneet aikaa keskustelulle tutkijan kanssa, mikä kertoo opiskelijoiden halusta auttaa yliopistokoulutuksen kehittämisessä. Ennakkokyselyyn vastasi alle puolet kurssin osallistujista ja loppukyselyyn vain noin kolmasosa. Kyselyihin vastanneista muita kuin ensimmäistä vuottaan matematiikkaa opiskelevia oli noin 20% molemmissa kyselyissä, mikä vähensi tutkimuksessa huomioonotettujen vastausten määrää entisestään. Toisaalta, tutkimuksen tarkoituksena oli tarkastella haastateltavien kokemuksia syvällisemmin ja siinä onnistuttiin. Tapaustutkimuksen luonteesta johtuen tutkimuksen tuloksia pitää tarkastella suhteessa kontekstiin, eivätkä tutkimuksen tulokset ole suoraa yleistettävissä koskemaan koko kohderyhmää ilman jatkotutkimuksia. Tuloksista nousee kuitenkin esiin erilaisia suhtautumisia yliopistomatematiikan opiskeluun, joten tulosten avulla saadaan näkökulmaa opiskelijoiden kokemuksiin.

Avoimeksi kysymykseksi jää ainakin se, kuinka moni matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelmaan valituista opiskelijoista voidaan luokitella haastateltavien tapaan Tyytyväisiin tai Pettyneisiin. Luultavasti opiskelijoiden suhtautumisissa löytyisi erilaisia variaatioita, joiden luokitteluun tarvittaisiin enemmän ryhmiä.

Tutkimuksen alkuperäisenä tavoitteena oli hyödyntää menetelmätriangulaatiota, eli käyttää useita tiedonhankintamenetelmiä, aineiston keruussa. [53] Tällöin kvalitatiivista ja kvantitatiivista tutkimusta yhdistämällä olisi saatu monipuolista tietoa esimerkiksi opiskelijoiden matematiikkakuvasta. Matematiikkakuvan tarkastelu jäi tässä tutkimuksessa kvalitatiiviseksi sisällönanalyysiksi, faktorianalyysin sijaan, liian pienen vastaajajoukon takia. Lisäksi tutkimuskysymykset osoittautuivat haastateltuvaiheessa laajoiksi, niiden rajaaminen olisi mahdollistanut yksityiskohtaisemmat aiheet teemahaastattelussa.

Tutkimuksen teon aikana tutkija pääsi tutustumaan kvalitatiiviseen tutkimukseen ja oppi prosessista paljon. Käsitys matematiikkakuvasta, matemaattisesta kielentämisestä ja todistamisen asemasta lukiossa selkiintyi. Tutkijan omat ennakkokäsitykset saivat osittain tukea tutkimuksen tuloksista, mutta näkökulma erilaisiin suhtautumiin yliopistomatematiikan opiskelua kohtaan laajeni.

Tämä tutkimus avasi näkökulmia ensimmäistä vuottaan yliopistomatematiikkaa opiskelevien kokemuksiin. Tutkielman valmistumisen jälkeen osalla vuosittain aloitavista opiskelijoista on lukio suoritettuna lukion opetussuunnitelman perusteiden 2015 mukaisesti. Tulevaisuus näyttää, auttaako todistamisen määrän lisääminen lukiokoulutukseen myös yliopistomatematiikan opiskeluun, kuten voisi olettaa. Jatko-tutkimusten kohteena voisi esimerkiksi tarkastella laajemmin yliopisto-opintojaan aloittavien matematiikkakuvaa tai tarkastella syvällisemmin, mitkä tekijät vaikuttavat siihen, että opiskelu koetaan haastavaksi. Tutkimuksen kohteena voisi olla myös luennoitsijoiden ja harjoitusryhmien pitäjien käsitykset ja kokemukset. Kiinnostavaa olisi myös tutkia, miten yliopisto-opettajan pedagoginen koulutus tai sen puuttuminen vaikuttaa opetukseen ja opiskelijoiden kokemuksiin. Hyvä ja laadukas opetus edellyttää tutkimustietoa yliopisto-opiskelijoiden oppimisesta, tieteenalakohtaisista erityispiirteistä sekä eri tieteenalojen opiskelukulttuurien vaikutuksesta opetukseen ja sen kehittämiseen. Tiedekulttuurien tutkimus haastaa refleктоimaan oman alan perususkomuksia ja lähtökohtia, jotka vaikuttavat arjessa melkein huomaamatta. [54]

# Lähteet

- [1] Tampereen yliopiston koulutustarjonta, Sisäänotto. Matemaatiikka ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma. Viitattu 1.3.2018. <https://www.uta.fi/opiskelijaksi/kohde?id=2237&hid=2587&qt-koulutus=3>
- [2] Tampereen yliopiston Intra, Johdon tietojärjestelmä, koulutus, tutkinnot. Viitattu 2.3.2018. <https://intra.uta.fi/portal/group/johdon-tietojarjestelma/tutkinnot>
- [3] Potila, A-K., 2014. Opiskelijatutkimus 2014: Korkeakouluopiskelijoiden toimeentulo ja opiskelu. Julkaisussa *Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2017:37* Opetus- ja kulttuuriministeriö. Viitattu 2.3.2018. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-285-2>
- [4] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (pdf) Viitattu 3.3.2018. [http://www.oph.fi/download/47345\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2003.pdf](http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf)
- [5] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 (pdf) Viitattu 3.3.2018. [http://www.oph.fi/download/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015.pdf](http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf)
- [6] Tampereen yliopiston opinto-opas 2015-2017. Viitattu 22.4.2018. <https://www10.uta.fi/opas/koulutus.htm?opsId=142&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2016&koulid=156>
- [7] Yliopistolaki pykälä §36 2015/558 Annettu Helsingissä 20.3.2015. Viitattu 10.4.2018. <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2009/20090558#L5P36a>
- [8] Silius K., Pohjolainen S., Miilumäki T., Kangas J., Joutsenlahti J. 2011. *Korkeakoulumatematiikka tekkarin kompastuskivenä*. Tampere University Press.
- [9] Joutsenlahti, J., Ali-Löytty, S., Pohjolainen, S. 2016. Developing Learning and Teaching in Engineering Mathematics with and without Technology. Julkaisussa *44th SEFI Conference, 12-15 September 2016*, Tampere Finland.
- [10] Pajarre E., 2012. *Minä DI-opiskelijana - Ensimmäisen vuoden opiskelijoiden kokemuksia ja odotuksia yliopisto-opiskelusta*. Tampereen teknillinen yliopisto. Yliopistopalvelut. Raportti 7
- [11] Isoaho, T. 2014. *Onnelliset kohtaa Yliopiston opettajien ja opiskelijoiden myönteiset opetus- ja opiskelukokemukset -pro gradu tutkimus*. Viitattu 10.4.2018. <http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201408222077>

- [12] Perttula J., 2005. Kokemus ja kokemuksen tutkimus: Fenomenologisen erityistieteen tieteenteoria Teoksessa Perttula J., & Latomaa T. (toim.) *Kokemuksen tutkimus: Merkitys - tulkinta - ymmärtäminen*. Helsinki: Dialogia Oy.
- [13] Pehkonen, E. 1995. *Pupil's View of Mathematics*. Initial report for an international comparison project. Yliopistopaino, Helsinki.
- [14] Joutsenlahti, J. 2005. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Tampereen yliopistopaino Oy Juvenes Print. Tampere.
- [15] Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A., Pehkonen, E., 2007. Millä tavalla luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuvan muutosta voidaan edistää? Teoksessa J. Lavonen (toim.) Tutkimusperäinen opettajankoulutus ja kestävä kehitys. Ainedidaktinen symposium Helsingissä 3.2.2006. Osa 1. Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 285, 349-359.
- [16] Törner, G. 1996. *Basic Concepts of Mathematical contents and Mathematical workviews* (mathematical beliefs) as didactical conceptualizations. G. Törner, Current State of Research on Mathematical Beliefs II. Proceedings of the 2nd MAVI Workshop, March 8-11, 1996. Gerhard-Mercator-University Duisburg
- [17] Bikner-Ahsbahr, A. 2003. A Social Extension of a Psychological Interest Theory. *Proceedings PME 27*. Viitattu 24.3.2018. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500908.pdf>
- [18] Pehkonen E., Pietilä A., 2003. On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education. *Proceedings of the third conference of the European Society for Research in Mathematics Educations*. Viitattu 18.3.2018. [http://www.dm.unipi.it/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG2/TG2\\_pehkonen\\_cerme3.pdf](http://www.dm.unipi.it/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG2/TG2_pehkonen_cerme3.pdf)
- [19] Pietilä, A, 2002. *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva. Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina*. Helsingin yliopisto. Yliopistopaino. Viitattu 2.2.2018. <http://urn.fi/URN:ISBN:952-10-0454-1>
- [20] Op't Eynde, P., De Corte, E., Verschaffel, L., 2002. Framing students' mathematics-related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (toim.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer, 13-37.
- [21] Malmivuori, M. 2001. *The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regular process of personal learning processes: The case of mathematics*. University of Helsinki. Department of Education. Research Report 172.
- [22] Di Martino, P., & Zan, R., 2011. *Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions*, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 43(4). Viitattu 15.3.2018.

[https://www.researchgate.net/publication/226822814\\_Attitude\\_towards\\_mathematics\\_A\\_bridge\\_between\\_beliefs\\_and\\_emotions](https://www.researchgate.net/publication/226822814_Attitude_towards_mathematics_A_bridge_between_beliefs_and_emotions)

- [23] Hannula, M., 2016. Introduction. Teoksessa Goldin, G., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M., Zhang, Q., 2016. *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. Viitattu 15.3.2018. <http://jultika.oulu.fi/files/nbnfi-fe201702131552.pdf>
- [24] Di Martino, P. 2016 Attitude, Teoksessa Goldin, G., Hannula, S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M., Zhang, Q., 2016. *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. Viitattu 15.3.2018. <http://jultika.oulu.fi/files/nbnfi-fe201702131552.pdf>
- [25] Pantziara, M., 2016. Student Self-efficacy Beliefs. Teoksessa Goldin, G., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M., Zhang, Q., 2016. *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. Viitattu 15.3.2018. <http://jultika.oulu.fi/files/nbnfi-fe201702131552.pdf>
- [26] Hannula, M. S., Bofah, E., Tuohilampi, L., & Metsämuuronen, J., 2014. A longitudinal analysis of the relationship between mathematics-related affect and achievement in Finland. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th conference of the IGPME and the 36th conference of the PME-NA*, (Vol. 3, pp. 249-256). Vancouver, Canada: PME
- [27] Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S., 2011. *Self-concept and self-efficacy in mathematics: Relation with mathematics motivation and achievement*. Journal of Education Research, 5(3/4), 241-265.
- [28] Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Muller, M., & Messner, R. (2012). *Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations*. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 215-237.
- [29] Krantz, S. 2006. *An Episodic History of Mathematics, Mathematical Culture through Problem Solving*. MAA Textbooks. 471 p.
- [30] Mäkelä, V. 2011. *Todistaminen suomalaisessa ja etelä-korealaisessa koulumatematiikassa*. Pro gradu -tutkielma. Matematiikka. Tampereen yliopisto. Viitattu 22.4.2018. <http://urn.fi/urn:nbn:fi:uta-1-21243>
- [31] Viertola, A-K. 2011. *Todistaminen lukion pitkässä matematiikassa*. Pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Viitattu 22.4.2018. <http://docplayer.fi/4298902-Todistaminen-lukion-pitkassa-matematiikassa.html>



- [32] Leino, A. 2017. *Todistaminen pitkän matematiikan sähköisissä ylioppilas-kirjoituksissa*. Pro gradu -tutkielma. Tampereen yliopisto. Viitattu 22.4.2018. <http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201712012854>
- [33] Yliopistolaki 2015/558 Annettu Helsingissä 20.3.2015. Viitattu 22.4.2018. <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2009/20090558>
- [34] Matematiikan työpaja, Tampereen yliopiston Informaatitieteiden Opetusohjelma 2016-2017. Viitattu 5.5.2018. <https://www10.uta.fi/opas/opetusohjelma/marjapuuro.htm?id=32139>
- [35] Keranto, T. 2004 Kriittinen ajattelu ja tieteentuntemus matematiikan opetuksessa. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T., Malinen, P.(toim.) *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä.
- [36] Joutsenlahti, J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa Virta, A. & Marttila, O. (toim.) *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta*. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopisto, kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:71, s. 188-196.
- [37] Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen, P. E. & Sormunen, K. (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa*. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Publications of the University of Eastern Finland, Reports and Studies in Education, Humanities, and Theology 1. Kopijyvä Joensuu. s. 3-15
- [38] Joutsenlahti, J., Rättyä, K. (2015) Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa Kauppinen M., Rautiainen, M., Tarnanen, M. (toim.). *Rajaton tulevaisuus: kohti kokonaisvaltaista oppimista: ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014*. Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura. s. 45-62.
- [39] Joutsenlahti, J., Kulju, P., 2017. *Multimodal Languageing as a Pedagogical Mode - A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics*. Viitattu 4.3.2018. <http://www.mdpi.com/2227-7102/7/1/9/htm>
- [40] Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J., Harjulehto, P. 2013. Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. Teoksessa Häikiöniemi, M., Leppäaho, H., Nieminen, P. & Viiri, J. (toim.) *Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association*, Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran konferenssijulkaisu 2012. University of Jyväskylä, Department of Teacher Education, Research report 90. s. 59-70.
- [41] Linnusmäki J., 2015. *Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla*. Diplomityö. Teknis-luonnontieteellinen

koulutusohjelma. Tampereen teknillinen yliopisto. Viitattu 2.2.2018. <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201507291441>

- [42] Sarikka H., 2014. *Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena*. Diplomityö. Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma. Tampereen teknillinen yliopisto. Viitattu 2.2.2018. <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201404141144>
- [43] Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. Teoksessa Gates, P. (toim.), *Issues in mathematics teaching* (s. 232- 244). London: Routledge Falmer.
- [44] Bauersfeld, H. 1995. "Language games" in the mathematics classroom: their function and their effects. Julkaisussa P. Cobb, & H. Bauersfeld (toim.) *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. (s. 271-294)
- [45] Kiviranta, K. 1995. Giorgin fenomenologisen psykologian metodi laadullisen tutkimuksen apuvälineenä. Teoksessa J. Nieminen (toim.) *Menetelmävalintojen viidakossa. Pohdintoja kasvatuksen tutkimisen lähtökohdista*. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja B: N:o 13
- [46] Laine, T. 2015. Miten kokemusta voidaan tutkia? Fenomenologinen näkökulma. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin*. Jyväskylä: PS-kustannus, 29-51.
- [47] Perttula, J. 1996. Ihmistieteiden tiedonmuodostus ja tutkimusetiikka. Teoksessa A. Palmroth & I. Nurmi (toim.) *Alttiiksi asettumisen etiikka. Laadullisen tutkimuksen eettisiä kysymyksiä*. Jyväskylän yliopiston ylioppilaskunta. Julkaisusarja N:o 38, 83-108.
- [48] Syrjälä, L. 1994. Tapaustutkimus opettajan ja tutkijan työvälineenä. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen, S. Saari. *Laadullisen tutkimuksen työtapoja*. Rauma: Kirjayhtymä Oy.
- [49] Hirsijärvi, S. & Hurme, H. 2011. *Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö*. Helsinki: Gaudeamus.
- [50] Saaranen-Kauppinen A. & Puusniekka, A. 2006. *KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto* [verkkójulkaisu]. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto [ylläpitäjä ja tuottaja] Viitattu 2.5.2018. [http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L7\\_3\\_2.html](http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L7_3_2.html)
- [51] Eskola, J. 2015. Laadullisen tutkimuksen juhannustaiat. Laadullisen aineiston analyysi vaihe vaiheelta. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin*. Jyväskylä: PS-kustannus, 185-206.

- [52] Tutkimuseettinen neuvottelukunta, Toimituskunta: Varantola, K., Launis, V., Helin, M., Spoof, S-M., Jäppinen, S. 2013. *Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitleminen Suomessa*. Helsinki. Viitattu 7.5.2018. [http://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK\\_ohje\\_2012.pdf](http://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf)
- [53] Saaranen-Kauppinen A. & Puusniekka, A. 2006. *KvantiMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto* [verkkojulkaisu]. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoarkisto [ylläpitäjä ja tuottaja] Viitattu 7.5.2018. [http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L2\\_3\\_2\\_4.html](http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/kvali/L2_3_2_4.html)
- [54] Nevgi, A. & Lindblom-Ylänne, S. 2005. Mihin yliopistopedagogiikkaa tarvitaan? Teoksessa R. Jakku-Sihvonen (toim.) *Uudenlaisia maistereita. Kasvatusalan koulutuksen kehittämislinjoja*. Jyväskylä: PS-kustannus, 73-85.

# Liitteet

## Liite 1: Ennakkokysely

**Ennakkokysely pro gradu tutkimusta varten**

Tämä kysely liittyy pro gradu-tutkimukseeni. Kysely on kohdistettu Johdatus matemaattiseen päättelyyn (syksy 2016) -kurssilaisille ja sen vastauksia käsitellään luottamuksellisesti. Vastaaminen on vapaaehtoista eikä se vaikuta kurssin suorittamiseen. Tutkimuksen lopputuloksista ei voi tunnistaa yksittäistä vastaajaa.  
Kiitos vastauksesta! Lisätietoja: Meri Ahonen, ahonen.meri.t@student.uta.fi

Opiskelijanumero:

Sukupuoli

Pääaine

Jos vastasit edellä "joku muu":  
mikä pääaine?

Tämä on järjestysluvultaan \_\_\_\_  
vuosi kun opiskelen  
matematiikkaa yliopistossa

Aloitin yliopisto-opiskelut  
nykyisessä tukinto-ohjelmassani  
vuonna

Olen käynyt lukion

Valmistuin ylioppilaaksi vuonna

Olen lukenut lukiossa

Ylioppilaskirjoituksissa kirjoitin

Ylioppilaskirjoituksissa kirjoitin

Kuva 7.1: Ennakkokyselylomake osa 1

Ylioppilaskirjoituksissa kirjoitin --Valitse tästä--

Ylioppilaskirjoituksissa kirjoitin matematiikasta arvosanan --Valitse tästä--

Lukion päättötodistuksessa matematiikan arvosanani on muistaakseni --Valitse tästä--

Väitteet

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
1. Matematiikka on joukko sääntöjä.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. Matematiikan oppiminen on suurimmaksi osaksi ulkoa oppimista.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Matemaattisia ongelmia voidaan ratkaista käyttämällä tiettyjä sääntöjä.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. Matematiikka auttaa ajattelemaan tiettyjen täsmällisten sääntöjen mukaan.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Matematiikka auttaa ajattelemaan loogisesti.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
6. Useimmille matemaattisille tehtäville on olemassa erilaisia ratkaisutapoja.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7. Matematiikan oppiminen on yksin oppimista.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8. Suurin osa matematiikasta on käyttökelpoista työelämässä.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9. Matematiikkaa ei tarvita jokapäiväisessä elämässä.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10. On tärkeää osata matematiikkaa, jotta saisi hyvän työpaikan.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
11. Matematiikasta on hyötyä jokapäiväisien ongelmien ratkaisemisessa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Kuva 7.2: Ennakkokyselylomake osa 2

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
11. Matematiikasta on hyötyä jokapäiväisten ongelmien ratkaisemisessa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
12. Jokainen pystyy oppimaan matematiikkaa, jos opetusmenetelmiin kiinnitetäisiin riittävästi huomiota.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
13. Opetuksessa pitäisi kiinnittää entistä enemmän huomiota käytännön sovelluksiin.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
14. Luulen matematiikan yliopisto-opiskelun olevan minulle helppoa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
15. Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
16. Opin uudet matematiikan asiat hitaasti.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
17. Ymmärrän yleensä sen, mitä matematiikan tunneilla käsitellään.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
18. Minusta tuntuu hyvältä, kun itse ratkaisen matematiikan tehtävän.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
19. En usko, että menestyn tällä kurssilla.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
20. Luulen saavani tällä kurssilla hylätyn arvosanan ensimmäisellä yrittämällä.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
21. Osaan mielestäni hyvin matematiikkaa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
22. Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
23. Olen valmis tekemään pitkäjänteisesti töitä tällä kurssilla saavuttaakseni tavoitteeni.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
24. En halua käyttää kovin paljon aikaa matematiikan opiskeluun.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
25. Olen valmistautunut käyttämään enemmän aikaa matematiikan opiskeluun yliopistossa verrattuna aiempiin matematiikan opintoihini.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
26. Jos saisin valita, en enää opiskelisi matematiikkaa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Kuva 7.3: Ennakkokyselylomake osa 3

	Täysin samaa mieltä	Jokseenkin samaa mieltä	Jokseenkin eri mieltä	Täysin eri mieltä	En osaa sanoa
26.Jos saisin valita, en enää opiskelisi matematiikkaa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
27.Toivon saavani opiskella lisää matematiikkaa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
28.Tulen tarvitsemaan lukiossa oppimaani matematiikkaa yliopistossa.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
29.Lukiomatematiikkaa tarvitaan vain yliopistoon sisäänpääsyyn.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
30.Pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista kuin tytöt.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
31.Tytöt tarvitsevat vähemmän matematiikkaa kuin pojat.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Kerro omin sanoin mitä matemaattinen todistaminen mielestäsi on: (laajenna tekstiruutua vetämällä nurkasta)

Tämä on ennakkokysely ja kurssin jälkeen on toinen kysely. Näiden kahden kyselyn pohjalta pyydän muutamia vastaajia teemahaastatteluun.

Mikäli minua pyydetään haastatteluun \_\_\_\_\_  
haastateltavaksi.

--Valitse tästä-- ▾

Vapaa sana

Tietojen lähetyk

Tallenna Eitäyttö URL

Kuva 7.4: Ennakkokyselylomake osa 4

## Liite 2: Kielentämistehtävät

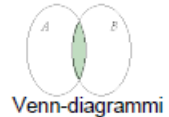
Nimi: \_\_\_\_\_ Opiskelijanumero: \_\_\_\_\_

### Johdatus matemaattiseen päättelyyn -kurssin bonustehtävät

Seuraavien tehtävien teossa on tarkoitus käyttää luonnollista kieltä matematiikan symbolikielen rinnalla. Voit siis selittää omin sanoin ja havainnollistaa piirtämällä. Voit myös piirtää esimerkiksi Venn-diagrammeja. Jatka tarvittaessa tehtävän alapuolelle tai uudelle paperille.

Tehtävistä saa kummastakin yhden harjoitusrastin.

Palauta paperi 4.11. luennolle tai moodleen.



**Tehtävä 1:** Etsi todistuksesta virhe ja korjaa se. Perustele todistuksen vaiheet tehtävän viereen sanallisesti.

Olkoon  $A$  ja  $B$  joukkoja.

Jos  $P(A) \subseteq P(B)$  niin  $A \subseteq B$ .

Todistus:

Oletetaan, että  $P(A) \subseteq P(B)$ .

Osoitetaan, että  $A \subseteq B$ .

Valitaan jokin  $a \in A$ .

Nyt  $\{a\}$  on joukon  $A$  osajoukko, joten  $\{a\} \in P(A)$ .

Mutta koska  $P(A) \subseteq P(B)$  niin seuraa, että  $\{a\} \in P(B)$ .

Tästä taas seuraa  $\{a\} \subseteq B$  eli  $a \in B$ .

Siis jos  $a \in A$ , niin  $a \in B$ , joten  $A \subseteq B$ . □

Kuva 7.5: Kielentämistehtävä 1

**Tehtävä 2:** Täydennä puuttuvat kohdat ja perustele todistuksen vaiheet sanallisesti.

Todista, että  $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Todistus:

Oletetaan, että  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

Tällöin \_\_\_\_\_ tai  $x \in (B \cap C)$ .

Jos \_\_\_\_\_ niin  $x \in (A \cup B)$  ja  $x \in (A \cup C)$

Josta seuraa  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Jos  $x \in (B \cap C)$  niin  $x \in B$  \_\_\_\_\_  $x \in C$

Ja koska \_\_\_\_\_ niin  $x \in (A \cup C)$

Siis  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

□

Kuva 7.6: Kielentämistehtävä 2



## Liite 3: Loppukysely

### Loppukysely JMP-kurssilaisille pro gradu -tutkimusta varten

Tämä kysely liittyy pro gradu-tutkimukseeni. Kysely on kohdistettu Johdatus matemaattiseen päättelyyn (syksy 2016) -kurssilaisille ja sen vastauksia käsitellään luottamuksellisesti. Vastaaminen on vapaaehtoista eikä se vaikuta kurssin suorittamiseen. Tutkimuksen lopputuloksista ei voi tunnistaa yksittäistä vastaajaa. Kiitos vastauksesta! Lisätietoja: Meri Ahonen, ahonen.meri.t@student.uta.fi

Opiskelijanumero:

Jatka lausetta omin sanoin:  
Matematiikan opiskelu  
yliopistossa on kuin...

Vastaa seuraaviin kysymyksiin kertomalla omista kokemuksistasi, voit antaa esimerkkejä tai kertoa yleisesti. Tekstikenttää saa suurennettua vetämällä oikeasta alanurkasta.

Mitä tulee ensimmäiseksi mieleen  
yliopistomatematiikan  
opiskelusta?

Miltä matematiikan opiskelu  
Tampereen yliopistossa on  
tuntunut?

Millä tavoin matematiikan  
opiskelu yliopistossa eroaa luki-  
opiskelusta?

Miten yliopistomatematiikan  
opiskelu eroaa rakenteeltaan  
lukiomatematiikan opiskelusta?

Kuva 7.7: Loppukyselylomake osa 1

Miten yliopistomatematiikan  
opiskelu eroaa rakenteeltaan  
lukiomatematiikan opiskelusta?

Miten erot vaikuttavat  
oppimiseesi?

Kurssista Johdatus matemaattiseen päättelyyn:

Mitkä asiat koit vaikeaksi  
Johdatus matemaattiseen  
päättelyyn-kurssilla?

Miksi?


Mitkä asiat koit helpoksi Johdatus  
matemaattiseen päättelyyn-  
kurssilla?

Miksi?

Johdatus matemaattiseen päättelyyn -kurssin bonustehtävät

Kuva 7.8: Loppukyselylomake osa 2

**Johdatus matemaattiseen päättelyyn -kurssin bonustehtävät**  
 Seuraavien tehtävien teossa on tarkoitus käyttää luonnollista kieltä matematiikan symboliikielen rinnalla. Voit siis selittää omin sanoin ja havainnollistaa piirtämällä. Voit myös piirtää esimerkiksi Venn-diagrammeja. Jatka tarvittaessa tehtävän alapuolelle tai uudelle paperille.  
 Tehtävistä saa kummastakin yhden harjoitusarstin.  
*Palauta paperi 4.11. luennoille tai moodleeseen.*



Venn-diagrammi

**Tehtävä 1:** Etsi todistuksesta virhe ja korjaa se. Perustele todistuksen vaiheet tehtävän viereen sanallisesti.

Kurssilla teetettiin bonustehtäviä, joista tulee materiaalia tutkimukseen. Kaksi tehtävää oli kielentämistehtäviä, joissa oli tarkoituksena käyttää luonnollista kieltä matemaattisen symboliikielen lisänä. Oheinen kuva on muistini tueksi.

Millä tavoin kolt  
kielentämistehtävien edistyneen  
oppimistasi?

Autoiva kielentämistehtävät  
todistusajattelun oppimisessa?

Lopuksi

Kerro omin sanoin mitä  
matemaattinen todistaminen  
mielestäsi on.

Kuva 7.9: Loppukyselylomake osa 3

Autoiva kielentämistehtävät  
todistusajattelun oppimisessa?

Lopuksi

Kerro omin sanoin mitä  
matemaattinen todistaminen  
mielestäsi on.

Palaute kurssista:

Vapaa sana:

Kiitokset! Pyydän muutamia vastaajia haastatteluun tammi-helmikuussa ja lähetän pyynnön sähköpostitse.

Tietojen lähetyks

Tallenna

Esitäyttö URL

Kiitos!

Järjestelmänä Eduix E-lomake 3.1, [www.e-lomake.fi](http://www.e-lomake.fi)

Kuva 7.10: Loppukyselylomake osa 4

## Liite 4: Teemahaastattelun aihelista

### Haastatteluteemat

Alustus: tutkimuksen tarkoitus ja tausta

#### Tampereen yliopistoon päätyminen

Odotukset yliopisto-opiskelulta, koulutukselta

Tyytyväisyys

Tavoitteet

#### Matematiikan opiskelu yliopistossa

Odotukset

Kokemukset

Kokemuksiin vaikuttavat asiat

Opiskelukaverit

#### Matematiikan opetus ja oppiminen

Kokemus oppimisesta vai tuttuja juttuja, käsitteet

Todistamisen ymmärtäminen

Todistamisajattelun merkitys opiskelijan näkökulmasta

Kielentäminen uutena opetustyylinä, jatketaanko

Auttoiko ymmärtämään

Säilytettäviä asioita opetuksessa, poisjätettäviä

Kehitysideat

Kuva 7.11: Haastatteluteemat

## Liite 5: Taulukko opiskelijoiden vastauksista Loppukyselyn kysymykseen ”Jatka lausetta ’Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin...’”

Taulukko 1: Opiskelijoiden vastaukset lauseen ”Matematiikan opiskelu yliopistossa on kuin...” jatkoksi.

Positiivinen	Negatiivinen	Neutraali
Olisi uudessa paikassa. Mitä enemmän tutkii ympäristöä sitä enemmän löytää uutta	Eksyminen. Mitä enemmän tutkit ympäristöä, sitä enemmän huomaat olevasi hukassa	kasaisi legopalikoita
avaisi uuden jännittävän kirjan	kova työ	kysymysten sisällön pohtimista
harrastus	soutamista	tunnettujen asioiden kyseenalaistamista
uuden oppiaineen vastaanottamista	sipuli. Haluat syödä sen, mutta sitä leikatessa saattaa itketä.	tekisi jotakin sellaista, joka tuntuu välillä helpolta, mutta myös vaikealta
matikan opiskelu ala-asteella: opetellaan perusasioita uudesta näkökulmasta	suossa tarpomista	vieraan kielen suomentamista (ainakin osittain)
viettäisi aurinkoloman hotellissa	vääntäisi veistä haavassa	matemaattista todistamista
laittaisi rahaa pankkiin	metsän raivaamista	pään hakkaamista seinään
jatkuvaa näkökulmien laajentamista		